

# **СИНТЕЗ НА РОБАСТНО УПРАВЛЕНИЕ ЗА ИНТЕЛИГЕНТНИ СТРУКТУРИ**

**Монографичен труд**

**Даниела Ганчева Маринова**

**2014**



# Съдържание

<b>ВЪВЕДЕНИЕ</b>	<b>06</b>
<b>1. Преглед на състоянието на проблематиката</b>	<b>14</b>
1.1. Интелигентни структури и пиезоелектрици	14
1.2. Управление на структури	20
1.3. Уводни бележки	32
1.3.1. Системи с управление: Основни дефиниции и концепции	32
1.3.2. Основни стъпки при синтез на управление	38
<b>2. Линейни динамични системи</b>	<b>40</b>
2.1. Линеаризация	40
2.2. Общи свойства на линейни системи	42
2.2.1. Решение и предавателни матрици	42
2.2.2. Устойчивост	44
2.2.3. Честотна реакция	44
2.3. Управляемост	46
2.3.1. Предавателни функции и канонична форма на управлението	46
2.3.2. Условия за управляемост	47
2.4. Наблюдаемост	50
2.5. Представяне на предавателни матрици в пространството на състоянията	53
2.6. Уравнения на Ляпунов	56
2.7. Линейни динамични системи със стохастични входни сигнали	57
2.7.1. Гаусови случайни процеси	57
2.7.2. Решения на линейни диференциални уравнения с бял шум за входен сигнал	59
<b>3. Основни свойства на многомерни системи с обратна връзка</b>	<b>62</b>
3.1. Управление с обратна връзка по състоянията	63
3.2. Оценка на вектора на състоянията	67
3.2.1. Наблюдател на Луенбергер и управления с наблюдател	67
3.2.2. Редуциран наблюдател	68
3.3. Общи системи с обратна връзка	70
3.3.1. Структура	70
3.3.2. Основни преносни функции	72
3.3.3. Обратна връзка по състояния с интегрално управление	74
3.3.4. Вътрешна устойчивост	76
3.3.5. Спецификации за системи с обратна връзка	79
<b>4. <math>H_2</math> оптимално управление</b>	<b>82</b>

4.1. Линейно квадратично управление	83
4.1.1. Синтез на управление чрез минимизация на целева функция	83
4.1.2. Алгебрично уравнение на Рикати	86
4.2. Характеризиране на $H_2$ оптималните управления	88
4.2.1. Формулиране на задачата и основна теорема	88
4.2.2. Обратна връзка по състояние	91
4.2.3. Основна теорема	92
4.3. Филтър на Калман-Буси	95
4.4. ЛКГ управление	98
4.4.1. ЛКГ управлението като частен случай на $H_2$ управлението	98
4.4.2. Оценка на входната матрица за връщане на разлика	99
4.4.3. Полюси на системи с ЛК обратна връзка и възстановяване на преноса във веригата	100
4.5. ЛКГ управление за интелигентни структури	102
4.5.1. Оптимален наблюдател и синтез на ЛКГ управление за интелигентни строителни структури	102
4.5.2. $H_2$ управление на високи сгради	105
4.5.3. Оптимално управление на сгради при сеизмична активност	112
4.5.4. ЛКГ и полуактивно управление на комплекс от сгради	118
4.5.5. $H_2$ управление на вибрираща интелигентна греда	124
4.5.6. $H_2$ управление за композитни плочи	128
4.6 Други задачи	133
4.6.1. Задачи за оптимално управление	133
4.6.2. Системи описани с частни диференциални уравнения – закрепена греда	134
<b>5. <math>H_\infty</math> оптимално управление – Рикати подход</b>	<b>138</b>
5.1. Формулиране на общата $H_\infty$ задача	138
5.2. $H_\infty$ субоптимално управление в по метода на Рикати	139
5.2.1. Основна теорема за обратна връзка по изходи	139
5.2.2. Устойчивост	143
5.3. $H_\infty$ управление с пълна информация	144
5.3.1. Смесени Ханкел-Тоеплиц оператори	144
5.3.2. Теорема за пълната информация	147
5.4. Теорема за обратна връзка по изход	147
5.5. Обща $H_\infty$ задача: скалиране и отместване на веригата	149
5.6. Синтез на смесена чувствителност	153
<b>6. <math>H_\infty</math> оптимално управление – ЛМН подход и приложения</b>	<b>156</b>
6.1. Характеризиране на $H_\infty$ субоптималните управления чрез ЛМН	156
6.1.1. Гранична лема	156
6.1.2. Неизпъкнало характеризирание на $H_\infty$ субоптималните управления	157
6.1.3. Изпъкнало характеризирание на $H_\infty$ субоптималните управления	159
6.2. Свойства на $H_\infty$ субоптималните управления	161
6.2.1. Връзка между подходите на Рикати и ЛМН	161
6.2.2. Ограничение в поведението	162
6.3. $H_\infty$ синтез с ограничение за разполагането на полюсите	163
6.3.1. ЛМН области	163

6.3.2. Синтез на $\mathcal{D}$ - устойчиви $H_\infty$ оптимални управления	165
6.4. Решаване на ЛМН в пакета MATLAB	167
6.5. Активно погасяване на колебания на високи съоръжения	169
6.5.1. Предварителни бележки	169
6.5.2. Постановка на задачата	170
6.5.3. Решение на задачата за $H_\infty$ управление	172
6.5.4. Решение на задачата за робастно $H_\infty$ управление	173
6.5.5. Алгоритъм за оптимизиране	176
6.5.6. Числени резултати	177
<b>7. Неопределеност на система</b>	<b>178</b>
7.1. Моделиране на неопределеност	178
7.2. Неструктурирани неопределености	180
7.3. Структурирани неопределености	181
7.3.1. Структурирани неопределености в пространството на състоянията	181
7.3.2. Параметрични неопределености за преносни функции	184
7.3.3. Общ подход за неопределеност	185
<b>8. Синтез на робастно управление</b>	<b>188</b>
8.1. Теорема за малката константа	189
8.2. Робастна устойчивост при устойчиви неструктурирани неопределености	190
8.2.1. Основни твърдения	190
8.2.2. Частни случаи	191
8.3. Структурирана сингулярна стойност $\mu$	194
8.3.1. Основна идея и дефиниция	195
8.3.2. Основни свойства на структурната сингулярна стойност $\mu$	196
8.3.3. Оценки за $\mu$	197
8.4. Структурни робастна устойчивост и качество	198
8.4.1. Робастна устойчивост	198
8.4.2. Робастно качество	199
8.5. <b>D-K</b> итерация	201
8.6. Синтез на робастно управление за интелигентни структури	204
8.7. Намалване ред на управлението	216
8.7.1. Балансирани реализации	216
8.7.2. Балансирана редукция	218
8.7.3. Управление от нисък ред за гъвкава структура	219
<b>9. Робастно управление чрез <b>D</b> декомпозиция</b>	<b>226</b>
9.1. Предварителни бележки	226
9.2. Синтез на управление от нисък ред по $H_\infty$ критерий	228
9.3. <b>D</b> -декомпозиция за матрици	231
9.4. <b>D</b> -декомпозиция на ЛМН	231
9.4.1. Случай с един параметър	232
9.4.2. Случай с два и повече параметъра	233
9.4.3. ЛМН с неопределеност	234
9.4.4. Рандомизирани алгоритми за синтез с <b>D</b> –декомпозиция	237
<b>Литература</b>	<b>240</b>



## ВЪВЕДЕНИЕ

Навлизането на композитни материали от всички типове в инженерните структури (космически, подводни, автомобилни структури, както и медицински протези, спортни съоръжения и др.) през последните две десетилетия определя засиленият интерес към изследването и създаването на системи от композитни материали, за тяхното изучаване, математическо моделиране и синтезиране на управление.

Създаването и изучаването на композитни материали е интердисциплинарна област. Насоките на изследванията в тази област могат да се разделят условно на три направления: математическо моделиране, построяване на управление и материалознание. Този труд е посветен на въпросите за синтез на управление за интелигентни структури създадени от композитни материали при получени вече математически модели.

Мотивацията за този труд идва от многогодишната изследователка и преподавателска работа на автора в областта моделирането и на построяване на управление на строителни и на слоести композитни структури. Използват се механико-математически модели на ламинатни композити – греди, плочи, строителни структури, получени с метода на крайните елементи, на основата на които се построяват оптимални управления при различни критерии. Трудът се основава обширно на оригиналната работа на автора и представлява пряко продължение на изследванията в тази област през последните 20 години. Разглеждат се оптимален линейно квадратичен подход, линейно квадратичен гаусов метод,  $H_{\infty}$  и  $\mu$ -синтез робастни подходи, както и методът на линейни матрични неравенства за решаването на  $H_{\infty}$  задачата и Д-разбиване.

Теория на управлението е една вълнуваща и предизвикателна област в точните инженерните науки, защото по своята същинска природа тя е мултидисциплинарна, и защото тя играе критична роля в много практически приложения в техниката. За да сме по точни, теория на управлението обхваща такива разнообразни области като приложната математика, теория на системите, компютърни науки, информационни технологии, електроника, мехатроника, електроинженерство, машинно инженерство, химическото инженерство и др. Тя играе главна роля в инженерни приложения от всякаква сложност. Изследванията през последните три десетилетия показваха, че теория на управлението изисква много сериозни математически умения и стана извънредно привлекателна за изследователите в областта на приложната математика, особено онази нейна част, която касае робастното управление.

Най-основната идея в теория на управлението е да се промени динамичното поведение на една техническа система чрез управляващо устройство, така че динамиката да придобие известни предпочитани свойства. Почти във всички случаи,

изобретяването на управляващо устройство се осъществява чрез първоначално построяване на математически модел, който може да бъде осъществен и на компютър, и който служи като основа за синтеза на управлението. Ясно е, че моделът представлява реалната система само до някаква степен на точност. Независимо от това, управлението трябва да работи за реалната система както и за модела; с други думи, то трябва да бъде „робастно”, издръжливо срещу опростяване и евентуални неточности на математическия модел. Робастността винаги е играла ключова роля в теорията на управлението още от самото начало, но бяха нужни значително количество теоретически изследвания, за да бъдат намерени средства за анализ и синтез, които да работят задоволително за сложни технически системи. В частност, това важи както за технически системи с един вход и един изход така и за системи с много входове и изходи.

Тази работа е посветена на модерните аспекти на теория на управлението относно построяването на управления, имащи предопределено качество и робастни свойства. През последните две три десетилетия теорията на управлението промени своя характер. Независимо, че тя е добре развит клон от инженерните науки, тя се изгради и се разглежда като дисциплина от приложната математика. Това е момент, който изисква определено внимание: всички методи в модерната теория на управлението изискват задълбочено познаване на теоретичната и приложна математика.

При построяването на управлението се използват построени математически модели на композитни материали, които се линеаризират. Линеаризираният модел на техническата система се състои от система линейни диференциални уравнения за нейните физически състояния. Входовете на техническата система са управлението  $u$  и външните смущения  $d$  и изходът е променливата  $y$ , която се управлява, и която също е измерването. В класическата теория на управлението, диференциалните уравнения се използват, за да се пресметнат предавателните функции и обхващат само изходната променлива. В тази работа се разглеждат друг вид управления, които се основават на обратна връзка по състояния на системи с много входове и много изходи. Разглежда се обратна връзка по състоянията на система без входни сигнали, т.е. задача за стабилизация. С добавяне на следен входен сигнал, концепцията за обратна връзка по състояния се обобщава.

Обратната връзка по състояния изисква всички състояния да могат да се замерват. Разглеждат се случаите, когато това е невъзможно, и векторът на състоянията се оценява с наблюдател на Луенбергер (Luenberger). Ако техническата система е управляема, полюсите на затворената верига могат да бъдат предварително предписани. Остава полюсите да бъдат поставени така, че системата с обратна връзка да има дадени желани свойства на качеството и робастната устойчивост. Разглеждат се правила как трябва да се разположат полюсите за тази цел.

Представя се общ подход за системи с много входове и много изходи. Техническата система  $P$  има два входа, векторът  $w$ , състоящ се от външни смущения и входен сигнал, и управление  $u$ . Изходите са променливи  $z$ , които трябва да се управляват, и измервания  $y$ , които са вход за управлението. Управлението  $K$  обикновено е динамична система (но може да бъде константа като частен случай) и е лесно да се види, че класическото ПИД управление заедно с неговите обобщения както и обратната връзка по състояния (с или без наблюдател) са частен случай на

този подход. При по-нататъшните разглеждания, техническата система е по-обща и има възможност тя да съдържа тегла за качество и робастност. Правилната постановка и вътрешната устойчивост се дефинират адекватно и се характеризират за ММО системи.

За модерните методи, които използват  $H_{\infty}$  оптимизация или структурна сингулярна стойност  $\mu$ , ситуацията се задълбочава още повече. Може би тези, които виждат условията, характеризиращи  $H_{\infty}$  субоптималното управление за първи път, ще ги намерят твърде усложнени и трудни за разбиране. В действителност няма начин тези условия да бъдат направени приемливи от интуитивна инженерна гледна точка, защото те имат математическо естество. Единственият начин те да бъдат приети като естествени и основателни е да се разучат пълните строги математически доказателства. От друга страна, приложението на по-прогресивни методи, където теглата за качеството и структурата с неопределеност се уточнява, изисква отново сериозен инженерен опит и интуиция. Работата с модерната теория на управлението изисква фундаментални знания по линейна и висша алгебра, анализ и топология, както и математически начин на мислене.

В настоящата работа е наблегнато как модерните методи на теорията на управлението могат да се приложат към съвременни актуални проблеми. Интензивно се използва MATLAB и в частност Control Systems Toolbox и  $\mu$  Analysis and Synthesis Toolbox.

Частта на работата, посветена на  $H_{\infty}$  синтеза използващ две уравнения на Рикати и робастност, базирана на структурната сингулярна стойност  $\mu$ , съхранява духа на известната монография на Зоу, Дойл и Гловър [41]. Друг съвършено различен от  $H_{\infty}$  синтеза на управление се основава на линейни матрични неравенства (ЛМН), който също се разглежда в работата.

Модерното проектиране на управляващо устройство винаги изисква математически модел на техническата система. Това означава, че техническата система се заменя със система обикновени диференциални уравнения (ОДУ) или частни диференциални уравнения (ЧДУ) или комбинация от двете. Тук разглеждаме методи насочени към системи, управлявани от ОДУ. В повечето случаи системата ОДУ е нелинейна. Методите, които разглеждаме тук се прилагат директно само към линейни системи ОДУ с постоянни коефициенти. На пръв поглед това изглежда ограничително, но в повечето случаи тези методи работят ефективно и при нелинейни системи, тъй като обикновено се налага техническата система да бъде управлявана само в околност на точка на равновесие. Такава точка е константно решение на диференциалното уравнение за константни входове. Близко до точката на равновесие техническата система може да бъде апроксимирана с линейна система. Може да се опонира, че управляващият сигнал или силно смущение биха могли да изведат системата твърде далеч от точката на равновесие. В такива случаи е възможно да се използва техника, представляваща списък от решения, или нелинейността да се интерпретира като неопределеност за линейната система.

Имайки предвид тези обяснения, в този труд техническите системи ще бъдат разгледани като линейни системи ОДУ с постоянни коефициенти, които се допълват с две системи линейни уравнения за двете променливи при изхода:

Да се построи управляващо устройство означава да се намери такава система, която удовлетворява известни изисквания. Ако хардуерът на управляващото устройство е микропроцесор, тези уравнения трябва да бъдат програмирани в процесора, но тази стъпка тук няма да бъде обсъждана.

Построяването на математически модел на физическата (техническата) система означава, че трябва да се приложат физически закони, за да се намерят диференциалните уравнения, които управляват динамиката на системата. Тези уравнения могат също да бъдат намерени чрез идентификация или чрез комбинация на двата метода. При всички случаи се взема решение на какво ниво на детайлност ще бъде построен математическият модел. Това изисква добра преценка и известен опит. Когато се намери системата диференциални уравнения, която управлява реалната техническа система, трябва да се направи компютърна симулация. При симулацията тук е използвана средата MATLAB. Няма проста рецепта за построяването на модел, която да бъде приложима за всяка възможна ситуация. Трябва да се разберат основните свойства на физическата система, което е необходимо по-късно при синтеза на управлението.

След това се определят точките на равновесие. Математически, те са решения на множество от нелинейни уравнения. За дадена точка на равновесие трябва да бъде пресметната линеаризираната техническа система. Трудности се срещат, ако нелинейностите са недиференцируеми. Когато се създаде линеаризираният модел, се използват неговите основни свойства. Те трябва да бъдат удовлетворени, за да се намери нужното управление.

В част 1 се въвеждат някои основни дефиниции и постановки и се дават главните стъпки при синтез на управление. В част 2 се разглежда представяне на линейни ММО системи чрез обикновени диференциални уравнения (ОДУ) в пространството на състоянията. Въвежда се процедура за линеаризация, дава се решение, характеризира се устойчивостта и се пресмята честотната реакция. Разглеждат се четири важни свойства на линейните системи – управляемост, наблюдаемост, стабилизируемост и откриваемост, дават се техни характеристики и декомпозиция на Калман. Излага се представянето на предавателните матрици в пространството на състоянията и операции с тях за изследваните системи. Разглежда се уравнение на Ляпунов и възможността положителната определеност на неговото решение да се характеризира чрез наблюдаемост. Описват се линейни системи със стохастични входове, което е свързано със синтез на  $H_2$ -оптимално управление

В класическата теория на управлението при построяването на управлението не се използват състоянията, а само изходите на системата, Част 3 е посветена на въвеждането на нов вид управление, което се основава на обратна връзка по състояния. Разглежда се обратна връзка само по състояния без входни сигнали, която отговаря на задача за стабилизация. Концепцията се обобщава за случая, когато трябва да се следи входен сигнал. Въвежда се наблюдател на Луенбергер за случаите, когато не всички състояния могат да се измерят и следва да бъдат оценени. Разглежда се обща схема за ММО системи с обратна връзка, при която техническата система има два входа (смушения и управление) и два изхода (управляем и измервания). Управлението като правило е динамична система. Прави се анализ като се обръща внимание на коректното поставяне на схемата и вътрешната устойчивост.

С част 4 се започва разглеждането на синтез на управление. Системата с обратна връзка се разглежда като линеен оператор, който изобразява входа  $w$  в изхода  $z$ . Техническата система може да съдържа тегла, които да определят целите на синтеза. Управлението се строи така, че да минимизира дадена операторна норма на системата с обратна връзка. При синтеза на управление се използват  $H_2$  и  $H_\infty$  нормите.

Започва се със синтез на  $H_2$  оптимално управление. Това е задача за минимизиране на предавателната функция  $F_{zw}$  по отношение на  $H_2$  нормата и определяне на критериите за качество на системата във времевата област.

Отначало се разглежда задачата за квадратично оптимално управление ЛКР от вида  $u = Fx$ , където  $x$  е векторът на състоянието на системата. Този подход води до уравнение на Рикати, което играе ключова роля при синтеза на  $H_2$  и  $H_\infty$  управления. Общият случай на  $H_2$  задачата се разделя на няколко подзадачи. Въвежда се нова променлива  $v = u - Fx$ , за която първоначалната задача се свежда до задача за оценка на изхода. Последната е дуална на задача за предварително смущение, която от своя страна се интерпретира като частен случай на задачата за пълна информация (ЛКР задачата). Същата концепция се използва и за решаването на  $H_\infty$  задачата.

Внимание се отделя на филтъра на Калман като приложение на  $H_2$  теорията, който е специален вид наблюдател. Когато се комбинират линейно квадратично управление и филтърът на Калман, се получава линейно квадратичното гаусово управление ЛКГ (LQG), което също се разглежда като  $H_2$  задача. Изучават се робастните свойства. Изследва се как разполагането на полюсите на затворената верига влияе върху теглата за ЛК управление. В такива случаи ситуацията може да бъде подобрена чрез процедура, наречена предавателно възстановяване на веригата (loop transfer recovery), разработена за подобряване на случаите, когато комбинацията от ЛКР и филтър на Калман води до недостатъчна робастност.

За спецификации в честотната област, освен  $H_2$  нормата,  $H_\infty$  нормата също е адекватен инструментариум. Затова естествено възниква задачата за минимизиране на предавателната функция  $F_{zw}$  на затворената верига по отношение на  $H_\infty$  нормата. Има два важни подхода за решаването на тази задача. Единият се основава на две уравнения на Рикати, аналогично на този използван за  $H_2$  задачата и се разглежда в част 6. Другият метод използва линейни матрични неравенства и се представя в част 7. Стига се до построяване на субоптимални управления вместо оптимални управления. Основната идея за решаване на задачата е, както за  $H_2$  задачата, смяната на променливи от вида  $v = u - Fx$  с матрица  $F$ , която е свързана с уравнението на Рикати. Задачата, която се получава като резултат е отново задача за оценяване на изхода, която се редуцира в няколко стъпки до задачата с пълна информация. Техническите детайли са значително по-сложни от тези на  $H_2$  задачата. Основната структура на техническата система е подобна на тази при  $H_2$  управлението. Отново е направено предположението  $D_{11} = 0$ . Това предположение е естествено за  $H_2$  задачата, но е ограничително за  $H_\infty$  задачата, тъй като въвеждането на тегла с цел да се постигне определена честотна реакция на затворената верига води до обобщени технически системи с  $D_{11} \neq 0$ . Редуцирането на задачи с  $D_{11} \neq 0$  до такива с  $D_{11} = 0$  е възможно с процедура, наречена отместване на веригата. Въвеждането на тегла, зависещи от честотата в много ситуации води до задача за смесена чувствителност.

В част 7 се разгледа  $\mathbf{H}_\infty$  оптимално управление с подхода на линейни матрични неравенства (ЛМН). Отправната точка тук е начинът, по който характеризираме свойството  $\|\mathbf{G}\|_\infty < 1$  за предавателна матрица  $\mathbf{G}$ . Предавателната функция на затворената верига (closed-loop)  $F_{zw}$  се характеризира с ЛМН, за да се опишат субоптималните управления. Поради това, че характеризирането не е изпъкнало, което е изискване при формулирането на необходими и достатъчни условия за оптималност, се разглежда специален алгебричен подход, за да бъде дадено изпъкнало характеризиране чрез три ЛМН. Получават някои свойства на  $\mathbf{H}_\infty$  оптималните управления. Сравняват се условията за оптималност при Рикати и ЛМН подходите. Две от трите ЛМН кореспондират с уравненията на Рикати за  $\mathbf{X}_\infty$  и  $\mathbf{Y}_\infty$ , а третото неравенство съответства на условието  $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$ . Анализира се граничното поведение на субоптималните управления при  $\gamma \rightarrow \gamma_{opt}$ . Разглежда се задачата за синтез на управление с ЛМН в случая, когато полюсите на затворената верига трябва да лежат в предварително зададена област. С метода на ЛМН се получава теоретично потвърждаване на табулирането на коефициенти (gain-scheduling), което е обикновена практика при класическото управление. Представени са числени изследвания за система от втори ред, при които се демонстрира изборът и влиянието на теглата при  $\mathbf{H}_\infty$  синтеза.

$\mathbf{H}_\infty$  оптимизацията е адекватен инструмент за синтез на управление, ако характеристиките на обратната връзка са формулирани в честотната област. От друга страна  $\mathbf{H}_\infty$  оптималното управление не е необходимо робастно. Построяването на робастно управление може да бъде постигнато с така наречената Д-К итерация, което изисква прецизен математически апарат за робастност на система, която се разглежда в част 8. Източник на неструктурирана неопределеност е пренебрегването на високо честотната динамика, която се моделира с неизвестна предавателна функция заедно с някои тегла. Структурирана неопределеност възниква, ако един или повече параметри на техническата система не са напълно известни. Има параметрична неопределеност в комбинация с неопределена динамика. В част 8 се излага необходимият математически апарат, който покрива всички типове неопределеност, и който е основата за методите за анализ и синтез на робастни вериги по обратна връзка. Обсъдена е и неопределеност от втори ред.

Въпросът, който се разглежда в част 9 е колко голяма в смисъл на  $\mathbf{H}_\infty$  норма може да бъде неопределеността така, че системата с обратна връзка да бъде устойчива.. Този въпрос се решава с теоремата за малката константа, следвайки идеята, че неопределеността  $\Delta$  може формално да се разглежда като управление за “техническата система”, която е част от цялата система. Формулира се достатъчно условие за робастно качество за неопределеност от такъв вид. Големината на смущението както и големината на “техническата система” се изразяват чрез техните максимални сингулярни стойности. Смущенията се ограничават да принадлежат на структурно множество, което води до структурната сингулярна стойност  $\mu$  – обобщение на максималната сингулярна стойност. Получават се горна и долна граници, които водят до значително по-точни оценки за  $\mu$ . Разглеждат се също робастна устойчивост и робастно качество за смущения, принадлежащи на структурно множество. Разглежда се обобщение на теоремата за малката константа и необходими и достатъчни условия за робастна устойчивост и робастно качество.

Основавайки се на тези разглеждания, в част 9 се изучава алгоритъм (итерация), по който се синтезира управление с робастно качество и робастна устойчивост. Междинна стъпка при тази процедура е синтезът множество  $\mathbf{H}_\infty$  оптимални управления. Така получените  $\mu$  оптимални управления типично имат висок ред и се появява необходимостта да бъдат заменени с управления от по-нисък ред. Обсъжда се един подход за редуцирането им..

Част 10 е посветена на метода на  $\mathbf{D}$  –декомпозицията, който е ефективен подход при изследванията на задачите за робастно управление на системи с неопределеност. За линейна система, чийто характеристичен полином зависи от параметри, границата на областта на устойчивост на системата в пространството на параметрите се намира измежду решенията за уравнение, което представлява изображение на параметризираната имагинерна ос (границите на областта на устойчивост в равнината на корените) в пространството на параметрите. Когато параметрите са два, се получават две уравнения с две неизвестни, които в общия случай задават параметрична крива, която определя границите на областта на устойчивост. Тази крива разделя равнината на области с постоянно количество устойчиви корени на разглеждания полином. В това се състои основната идея на  $\mathbf{D}$  –декомпозицията.

Когато се изследва устойчивостта, от особен интерес е въпросът, остава ли системата устойчива, ако нейните параметри са постоянни, но са неизвестни и принадлежат на някакво множество. Методът се прилага и към системи, представени в пространството на състоянията при синтез на управление и анализ на неговата робастност (управление по изход). Нова област на приложение на метода на  $\mathbf{D}$  – декомпозицията е теорията на линейните матрични неравенства, където методът позволява да бъдат определени всички области в пространството на параметрите, в които афинно семейство симетрични матрици има фиксирано количество собствени стойности с еднакъв знак

Авторът изказва дълбока благодарност на акад. Василев С.Н., акад. Черноусько Ф.Л., проф. Рутковский В.Ю., проф. Поляк Б.Т., проф. Ставролакис Г.Е. и на проф. Мерзоев К.А. за цялостната им подкрепа при работата над този труд. Авторът изказва специални благодарности на ст. н. с. I ст. д.т.н. Суханов В.М. за всеотдайната му помощ при редактирането на някои части от работата.

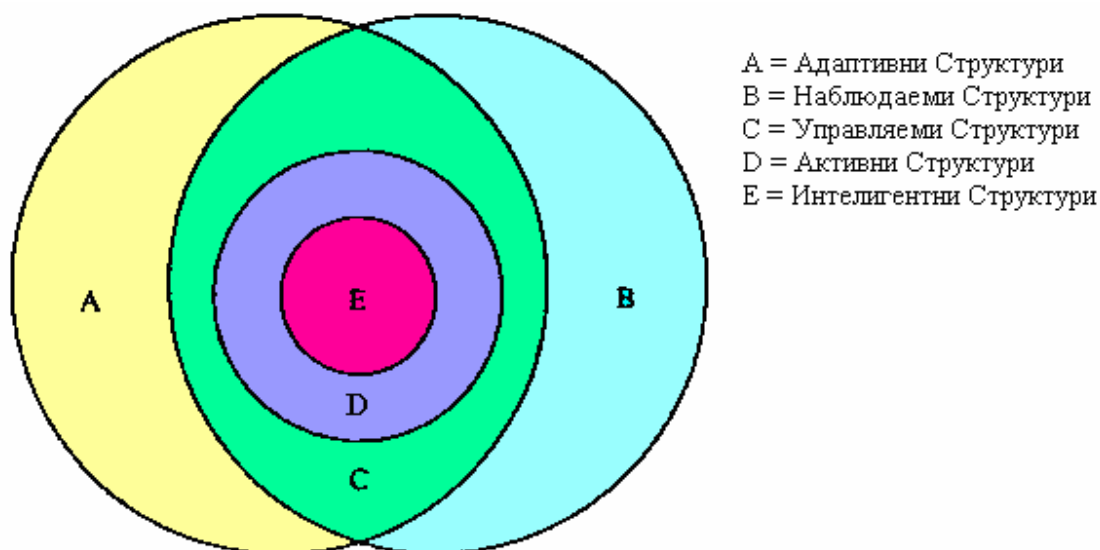


# 1. ПРЕГЛЕД НА СЪСТОЯНИЕТО НА ПРОБЛЕМАТИКАТА

## 1.1. Интелигентни структури и пиезоелектрици

Строгите изисквания към поведението на гъбквите структури изискват наблюдаването и управляването на тези структури по подходящ начин. Това обстоятелство е особено важно за космическите и самолетните структури, за които изискванията при изпълнението на поставените задачи са извънредно високи и отклонението от тези изисквания може да доведе до сериозни последствия. Затова изследователската работа, извършвана в областта на моделирането и управлението на гъбквите структури, се развива успоредно с прогреса в космическите технологии и тясно взаимодейства със самолетната индустрия [1].

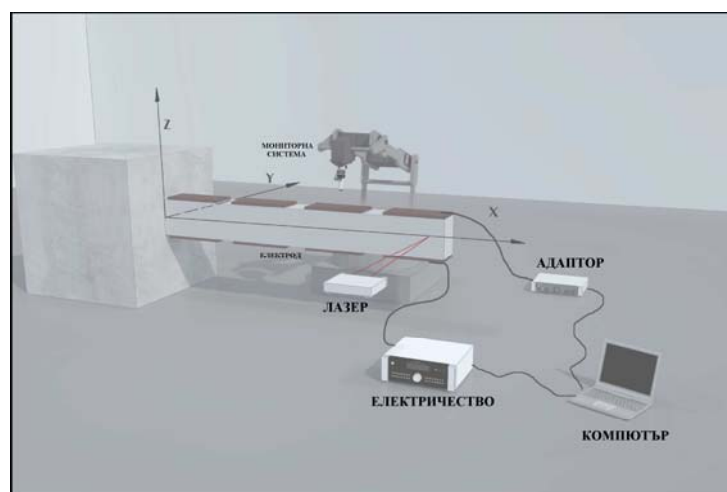
Мониторингът и управлението на гъбквите структури се изпълнява удобно чрез дискретното разполагане на датчици и управляващи устройства, които действат според избрания закон на управление. Много модерни техники за управление са развити в последните години и са предназначени да отговорят на предизвикателството към определянето на управления, които да подхождат на гъбквите структури, функциониращи при специални условия. Начинът на монтиране на датчиците и управляващите устройства е важен фактор при управляване поведението на гъбквите структури.



Фигура 1.1. Обща схема на подходите при структурно управление

Подходите при управление на структури могат да се представят със следната обща схема на Фиг.1.1 [2]. Адаптивната структура (множество А) притежава управляващи устройства, но не и датчици и дава възможност за промяна на състоянията или характеристиките на структурата чрез така нареченото програмно управляване.

Наблюдаваната система (множество **В**) притежава датчици за мониторинг на състоянието на системата (както в случая на мониторинг на сгради), но не и управляващи устройства. Управляемата структура (множество **С** - сечението на множества **А** и **В**) притежава и датчици и управляващи устройства в затворена верига за целите на активно управление на състоянията или характеристиките на структурата. Активна структура (множество **Д**) е управляема структура, която притежава интегрирани датчици и управляващи устройства, които изпълняват и структурни и управляващи функции. **Интелигентна структура** (множество **Е**) е активна структура, която интегрира в най-висша степен управляваща логика и електроника в допълнение към внедрените датчици и управляващи устройства. Независимо, че в литературата не е направено ясно разграничаване между „умна“ (smart) и „интелигентна“ (intelligent), като цяло се подразбира, че „умната“ структура съдържа материали от ново поколение, такива като пиезоелектрици, под формата на „умен“ външен слой. В настоящата работа ще бъде използван по-известният в нашата литература термин интелигентна структура, въпреки че ще разглеждаме „умни“ структури съдържащи пиезоелектрически материал и компютърна система, които позволяват на структурата активно да наблюдава и реагира на средата, в която се намира, по строго управляван начин (Фиг.1.2).



**Фигура 1.2.** Интелигентна система

Първата стъпка при построяване на **закона за управление** за структури е да се определят неговите цели, които могат да включват потискане на вибрации, абсорбция на енергия, управление на форма, мониторинг за повреди. В авиацията целите на управлението могат да се поставят като потискане на вълненията, комфорт при полета и облекчение на натоварването.

Законът за управление на интелигентни гъвкави структури с пиезоелектрически материали, може да бъде локален (децентрализиран), глобален (централизиран) или хибриден (йерархичен). Целта на локалното управление е да добави дъмпинг (регулатор) към структурата на локално ниво, докато целите на едно глобално управление са да стабилизира структурата и да отстрани смущенията. Глобалното управление има по-добри характеристики на качеството отколкото локалното

управление при стабилизиране на структурата, но то изисква обемисти пресмятания, особено ако броят на датчиците и управляващите устройства е голям [3-5]. Хибридно управление има две нива на управление: глобално управляващо устройство за цялостно качество и разпределено въздействие за локално регулиране.

При синтезирането на закона за управление на структура с пиезоелектрически устройства са използвани различни схеми на управление. Такива са обратна връзка по позиция/отместване и скорост [6], обратна връзка по деформации и скорост на деформиране [7], обратна връзка по сила [8], **П** (пропорционални), **ПД** (пропорционално-диференциален) и **ПИД** (пропорционално-интегрално диференциален) [9], **LQR** (линейно квадратичен), **LQG** (линейно квадратичен гаусов) и **H<sub>2</sub>** [10], **H<sub>∞</sub>** и **μ**-синтез [11], и вълнова абсорбция [12], както и фъзи управление [13]. Предварителна връзка при управление също е използвана в литературата. Тя има предимството, че е нечувствителна към пренасищане, но неин недостатък е, че системата за характеристиките на собствените вибрации на структура с прикрепени пиезоелектрически датчици и управляващи устройства може да е преопределена.

Деформацията е по-естествен вход и изход при гъвкави интелигентни структури отколкото отместванията при използването на разпределени подходи. При тези системи управлението с обратна връзка по деформации се постига по-лесно, затова често е предпочитано. Обратна връзка по скорост е добре известен метод, който добавя дъмпинг към структурата, но при този подход при високи честоти се усилва шумът. **ЛКГ** и **H<sub>2</sub>** методите позволяват целите на управлението да бъдат удобно определени във времевата област. При тях се изисква замерването/оценяването на много състояния на структурата, но те дават прецизни резултати. **H<sub>∞</sub>** и **μ**-синтезът са относително нови подходи за управление, които целят достигането на асимптотически устойчиви и реализуеми системи и са много ефективни при системи с неопределености.

Фъзи управляващият подход се отнася до множество от йерархични правила за управление. Той дава възможност построяването на управлението да се извършва без задълбочено познаване на структурата, което е практически невъзможно при останалите методи. При управляването на структури този подход не може да даде голяма точност, тъй като структурата има безкраен брой моди, които трябва да бъдат управлявани само с ограничен брой налични в практиката датчици и управляващи устройства. Невронните мрежи могат да бъдат използвани за наподобяване на различни схеми за управление за предсказване на динамиката на системата. Предимствата на невронното управление включват проста и евтина методология на проектиране както и възможности за on-line (по време на процеса) обучение особено за структури, променящи се във времето. Управление на вибрации може също да бъде постигнато с помощта на пиезоелектрически материали чрез маневриращи електрически вериги. Веригите съдържат едновременно индуктори и резистори, които могат да бъдат или фиксирани или настройвани.

Изборът на подходящи **датчици и управляващи устройства** е важна задача при замерването и управлението на интелигентни структури. Пиезоелектрическите датчици могат да бъдат избрани според типа премествания, скорости или ускорения, според ъгъла, неговата скорост или ускорение на промяна, според деформациите,

скоростта или ускорението им. Пиезоелектрическите управляващи устройства се подбират според типа на прилаганата сила, моменти или деформации.

В много случаи се използват управляващи закони с един вход/един изход. Когато има много дискретно разположени пиезоелектрически датчици и управляващи устройства, групирането им за максимално качество на управлението затруднява синтеза на управляващата стратегия. Частичното групиране може да бъде недостатъчно, а намирането на най-добрата комбинация достатъчно трудно. В такива случаи, за да се постигнат целите при управлението, се използват управляващи закони с много входове/много изходи.

Поставянето на едно и също място на датчици и управляващи устройства – **колокация** е много актуална задача при наблюдението и управлението на интелигентни структури. Съществува широк клас от схеми за управление, които могат да бъдат прилагани в тези случаи [8]. В тези случаи се използва и комбинирането на характеристиките на замерванията и управлението на пиезоелектрически материал в едно устройство и това автоматично води до колокация на датчик и управляващо устройство [14–16].

Греди, плочи, черупки, ферми, пръстеновидни структури са основни структурни елементи, които се използват активно при моделирането на структурите, анализа и синтеза на управление на тяхното поведение и форма чрез пиезоелектрически материали. Например, крилата на летателните апарати често се моделират математически като тънкостенни греди. Особен интерес представляват теориите за композитни плочи съчетани с пиезоелектрически сензори и управляващи устройства. В голяма част от литературата, уравненията на системата в тези случаи се получава като се използва принципа на Хамилтон и линейната теория за пиезоелектрици. Предмет на изследванията са статичният анализ и форма, както и управлението на динамиката им. В случаите, когато това е възможно, резултатите се потвърждават експериментално, в други случаи резултатите се подкрепят чрез компютърни симулации.

Пиезоелектрическите **управляващи устройства** превръщат електрическите входове в деформации/премествания на основната структура заради обратния пиезоелектрически ефект. Важни параметри за тяхната работа са деформацията, коравината, линейността, топлинната чувствителност, силата, плътността и ефективността. Сравняването на различни конфигурации от пиезоелектрически управляващи устройства показва широк диапазон от възможни реализации на сила и на преместване [17]. Например, една от пречките за по-широко използване на пиезоелектрическите управляващи устройства в самолетостроенето са изискванията към игнорирането на топлинни ефекти в електронните устройства. Друго ограничение при приложението им в управлението е насищането. Пиезоелектрическите материали губят своите качества, когато подаваното електрическо напрежение премине границата от 500 волта. В този случай, подаваното електрическо напрежение може да достигне възможния максимум на входа, когато веригата е затворена, без приложението закон за управление да е изпълнил своето предназначение. PZT материалите предлагат относително по-големи възможности при деформации и са по-малко чувствителни към температурните промени, затова са едни от най-предпочитаните за управляващи устройства за структури. Някои пиезокерамични

управляващи устройства са твърдо пресовани, което води до големи сили и малки отклонения, което ги прави удобни при в определени случаи на подтискане на вибрации. Като особеност може да се отбележи, че честотните граници на пиезоелектрическите управляващи устройства са значително по-високи от изискванията при структурното и акустично управление за предизвикване на еластични вълни при някои честоти.

Много изследвания са посветени и на плочи снабдени с пиезоелектрици за управление на тяхното поведение [18]. Аналитичните изследвания на пиезоелектрически управляващи устройства прикрепени на повърхността на тънки плочи са важна част от изследванията [19]. Основен подход тук е силите, генерирани от пиезоелектрическите слоеве, да се оценяват със статически анализ и да се добавят към уравненията на движение на плочата. В работа [20], например, се изследва управлението на вибрациите на панел чрез пиезоелектрическо устройство, прикрепено към повърхността на панела. Управлението се постига чрез дигитален закон за управление, който увеличава дъмпинга на доминиращите моди на вибрациите на панела. Теориите на многослоести тънки плочи и принципа на Хамилтон се използват в теоретичния анализ на плочи съдържащи пиезоелектрически слоеве. В едни от тях слоестият композит се разглежда като еквивалентен на единствен пласт [21]. В други, всеки слой се управлява локално чрез пиезоелектрическо устройство, за да се подтискат вибрациите на глобално ниво [22]. Работи се и върху оптимизирането на геометрията и на волтажа, който следва да се приложи към пиезоелектрическото устройство за управление, с цел да се минимизират вибрациите [23].

Директният пиезоелектрически ефект е дало възможност пиезоелектрическите материали да се използват като **датчици** в обширни разнообразни области още от откриването му преди повече от сто години. Пиезоелектрическите датчици превръщат деформацията/преместването в електрически заряд. Важни фактори за изследвания тук са чувствителността към деформацията/преместването, пространствената резолюция, честотните граници, температурната чувствителност, линейността и хистерезиса. Чувствителността на пиезоелектрическите датчици към деформации е от порядъка на  $10^4$  волта при подходящи натоварвания и геометрии, и техните честотни граници се разпростират върху редица конвенционални подходи за управление на структури [5]. Обикновено пиезоелектрически материали се интегрират със силиконови микро машинни структури и се формират микро-механични датчици с много малки размери, което позволява монолитното им взаимодействие с електронните вериги в един и същи чип. Пиезоелектрици се разполагат и по повърхността на структурата за замерване на механични ефекти като налягане, ускорение, сила и позиция [24]. Пиезоелектрическите датчици се използват за определяне на вибрациите и ответната реакция при въздействие на структури. Например, създават се алгоритми за оценяване на състоянието на запъната греда при вибриране с помощта на внедрени по дължината на гредата пиезоелектрически датчици.

В настоящата работа е широко застъпено използването на пиезоелектрически датчици за оценяване състоянието на изследваните структури (греди, плочи и сгради) и за построяването на оптимално управление на тяхното динамично поведение.

Въпросите свързани с **местоположението** и геометрията **на датчиците и управляващите устройства** и техният оптимален избор по отношение на дадени критерии за качество привличат вниманието поради тяхната важност в мониторинга и управлението на структури. Такива са и въпросите за анализ на чувствителността според формата или геометрията [25]. Разработват се оптимизационни процедури за интегрирано проектиране на структурата и управлението. За променливи при проектирането се разглеждат различни параметри на структурата и на управлението. Изследва се аналитично оптималното позициониране на управляващи устройства свързано с дебелината на тънки пиезоелектрически управляващи устройства в композитни структури с цел да се максимизира интеграцията между структурата и управляващото устройство. Изследва се зависимостта между оптималната дебелина на пиезоелектрическото управляващо устройство и неговото местоположение в структурата както и ефектът при управление на вибрациите особено при запънати структури. Разглежда се отношението на дебелините на управляващото устройство и структурата с цел максимизиране на статичната/динамичната ответна реакция [26–27]. При оптимизирането на позиционирането на управляващите пиезоелектрически устройства се разглеждат такива критерии за качество като дисипацията на енергията за крайно време, смекчаване на смущенията, необходимите усилия за управление, фундаменталните натурални честоти, процентът на потискане, реалните части на собствените стойности на управляваните структури и др. Създават се различни модели на греди и плочи за анализ на натуралните честоти на структурата и модално управление на формата ѝ при различни конфигурации на разположение на датчиците и управляващите пиезоелектрици [28]. Използва се теоретично и експериментално факторният анализ за оптимално разполагане на пиезоелектрически управляващи устройства върху греди. Оптимизирането се извършва върху множество от различни променливи. В случаите на симетрични моди на вибрация на структурата може да бъде заобиколено използването на разпределени датчици и управляващи устройства като се използват модални датчици и управляващи устройства, които наблюдават и регулират само някои от модите на структурата.

Изследвания свързани с оптимизиране на геометрията на управляващите устройства, тяхното позициониране и конфигурацията на датчиците са застъпени в настоящия труд и са свързани както с управление на формата на интелигентни греди и плоча, смутени от външни влияния, така и с управление на многоетажни сгради подложени на сеизмична активност.

Съществуват аналитични решения на линейните диференциални уравнения на пиезоелектрици на основата на вълновото уравнение и ортогоналност на пиезоелектрическите вибрации [29]. Но поради сложността на аналитичните вълнови уравнения в двумерния и тримерния случай, особено когато се добави управление, се използват апроксимиращи техники за решаването на тези уравнения като квадратична минимизация и вариационни принципи.

Формулировката на пиезоелектрическа среда чрез **метода на крайни елементи (МКЕ)** може да се получи от принципа на Хамилтон за най-малкото действие. Моделирането на пиезоелектрическа среда чрез МКЕ и приложенията в задачи за наблюдения и управления заемат значителна част от изследванията на интелигентните композитни структури. Голямата част от разработките на автора, включени в този

труд, са свързани с МКЕ модели на греди и плочи, снабдени с пиезоелектрици в качеството на датчици и управляващи устройства. МКЕ се използва за моделиране на динамичното поведение на запънати структури, подложени на външни влияния. МКЕ заедно с модален анализ се използва за анализ и синтез на управление на греди, плочи, дискове с крайни отношения на дебелина и другите размери. Разработват се нови крайни елементи в зависимост от особеностите на разглежданата композитна структура [30]. Резултатите получени чрез моделиране с МКЕ се сравняват с теоретични и експериментални резултати.

Като заключение може да се отбележи, че през последните две десетилетия много изследователска дейност е посветена на пиезоелектрическите материали и тяхното използване за наблюдение и управление на гъвкави структури. Усъвършенстването на пиезоелектрически датчици и управляващи устройства продължава да бъде важно при разработването на интелигентни структури. Някои от **актуалните теми**, които привличат изследователското търсене при наблюдаването и управлението на гъвкави структури чрез пиезоелектрици са следните [1]:

- по-нататъшно търсене на нови черти и многостранност при разполагането и формирането на пиезоелектрически датчици и управляващи устройство, за да се постигнат оптимум техни характеристики на качество;

- оптимум интегрирано проектиране на структури и управление на гъвкавите структури включващо разпределени пиезоелектрически датчици и управляващи устройства;

- създаване и приложения на робастни методи да управление.

Настоящият труд е посветен изцяло на тези актуални въпроси изключително потребни за практиката, изискващи математически умения и мултидисциплинарни знания.

## **1.2. Управление на структури**

Разрушителните земетресения в Нортридж, Калифорния през 1994 г. и в Кобе, Япония през 1995 год. потвърждават важността от смекчаване на тези случайности при проектирането на нови строителни структури. Към строителните структури спадат сгради, мостове, кули, антени и др. В настоящия труд ще се ограничим с разглеждането на сгради. Проектирането на дадена сграда на издръжливост само по себе си не осигурява непременно, че сградата ще реагира динамически така, че комфортът и сигурността на обитателите да бъде запазена. Затова управлението на вибрации на сгради, предизвикано от земетресения или вятър е важна хуманна и икономическа задача [31].

Идеята на управлението на строителни структури определена понастоящем води началото си от преди повече от 100 години от Дон Милн, професор и строителен инженер в Япония, който построява малка къща от дърво и я поставя на ролкови лагери, за да демонстрира, че една структура би могла да бъде изолирана от разклащането при земетресение. Развитieto на линейната теория на системите и

нейното приложение в областта на вибрациите, и в частност в динамиката на структури, зае повече от половината на двадесети век. По време на Втората Световна Война са разработени и ефективно приложени към самолетни структури такива концепции като вибрационна изолация, вибрационна абсорбция и вибрационен дъмпинг. За първи път общността на структурните инженери приема тази технология през 60-те години на миналия век и от тогава следва множество различни подходи. Управление на поведението на строителни структури може да бъде осъществено по различни начини като модифициране на твърдостта, масите, дъмпинга или формата, и чрез използването на пасивни или активни управляващи сили. До настоящия момент са реализирани успешно някои методи на управление на сгради. Ново предложени методи разширяват приложенията и подобряване на ефективността.

За гъвкави структури такива като високи постройките, особено онези подложени на силни ветрове, се използва успешно такъв пасивен подход като допълнителни ресори. Ресорните устройства: вискозни, вискозно-еластични или пластични, са разположени по структурата, осигурявайки значително увеличаване на дисипативната енергия и редуцирането на движението. Друг пасивен подход, прилаган към високи здания е ресор за регулиране на масата. Това устройство е класически динамичен вибрационен абсорбер. Допълнително монтираната система е настроена да редуцира амплитудата на движението на сградата. Независимо, че това е особено ефективна стратегия за постигане на стационарност на сградата при обикновени ситуации, за динамика като земетресения, където времевите ефекти са доминиращи, управлението на структури има отличителни черти, които ръководят изследователските търсения в тази област. Има много специфични фактори. Едно положително обстоятелство е, че строителните структури са закотвени и така те са статически устойчиви. Това контрастира с космическите структури, които изискват активно управление за осигуряване на устойчивост. По нататък, смущенията на средата, които ние асоциираме със строителните структури, като вятър и земетресение, са съвсем неопределени по отношение големината и времето на поява. Същевременно, характеристиките на механичните натоварвания са сравнително добре документирани. Също така изискванията за качество, които ние асоциираме със строителните структури, като цяло са необработени в сравнение с тези на космическите и самолетните структури.

От математическа гледна точка, управлението на строителни структури може да се разглежда като специална форма на вибрационна задача включваща големи и масивни тела, чиито движения следва да бъдат управлявани чрез модифициране на вибрационните свойства по различни начини или чрез прилагане на противо сили.

По-долу ще дадем някои **определения**:

**Активно управление.** Система с активно управление е тази, в която външен енергиен източник привежда в движение управляващо устройство, което от своя страна прилага усилия към структурата по предписан начин. Тези сили могат да се използват и да добавят и да разсейват енергия в структурата. В система с активно управление по обратна връзка сигналите изпратени на управляващите устройства са функция на ответната реакция на системата замервана с физически датчици (оптични, механични, електрически, химически и т.н.).

**Пасивно управление.** Система с пасивно управление не изисква външен източник за привеждане в движение. Устройствата за пасивна управление дават сили, които се пораждат при ответната реакция на движението на структурата. Енергията в пасивно управляваната структурна система, включвайки пасивните устройства, не може да бъде увеличаване чрез устройствата за пасивно управление

**Хибридно управление.** Общоприетата употреба на термина „хибридно управление” подразбира комбинираната употреба на активно и пасивно управление на системата. Например, структура оборудвана с разпределено вискозно-еластични ресори и снабдена с активен масов ресор в най-високата част на структурата, или изолирана при основата структура с активни управляващи устройства за подобряване на качеството.

**Полуактивно управление.** Системите с полуактивно управление са клас от системите с активно управление, за които изискванията за външна енергия са на порядък по-малки от системите с типично активно управление. Типично, устройствата за полуактивно управление не добавят механична енергия към структурната система (включвайки структурата и управляващите устройства), затова е гарантирана устойчивост с ограничен-вход и ограничен-изход. Устройствата за полуактивно управление често се разглеждат като управляеми пасивни устройства.

В настоящата работа основно място заема изследване на методи за **активно управление** на сгради.

Историята на създаване и управление на структури се дели на три ери. Голямата част от класическата ера за проектиране на строителни структури се занимава само със статични натоварвания. Модерната ера на проектиране на структури добави спецификации за динамичната реакция (напр. изискване към дъмпинга и модите). Днес строителните структури трябва да бъдат проектирани така, че да удовлетворяват статични и динамични изисквания при наличие на определен клас от смущения (външни натоварвания). Постмодерната ера предвижда уточнения на динамичната реакция в някои случаи, които са толкова сурови, че не могат да бъдат овладени само чрез управление по обратна връзка или поне чрез интегриран подход за проектиране на структурата и устройства за обратна връзка. Това изисква интердисциплинарни изследвания. Целите на постмодерната ера са да се увеличи възможността за оцеляване на сградата (и оборудването вътре в сградата) в присъствието на екстра ординарни смущения, причинени от силни ветрове и земетресения.

Активното управление в този труд се асоциира със синтез на управление по обратна връзка. Целите на синтеза за физически системи могат да бъдат формулиране както следва (задача за физически системи **ЗФС**):

**ЗФС:** Напреженията, деформациите, ускоренията и преместванията (всички „изходи”) на определени места на структурата да се поддържат в определени граници (пик, средно квадратично отклонение и т.н.) в присъствието на произволни смущения (ветрове или земетресения) по-малки от известна „големина” (измерена като пик на енергия или по скалата на Рихтер и т.н.).

Някои от ограниченията за изходите са избрани за комфорт на обитателите (ускоренията), а някои са избрани за сигурността им (цялост на структурата), обикновено свързани с премествания.

Има два начина да се приближи ЗФС: (1) с математически модели; и (2) без математически модели. Без математически модели може при проектирането просто да се избират интуитивно параметри на структурата или управлението и да се опитват на физическата система. Чрез многократни опити може да бъде даден отговор, който удовлетворява интуитивното основание. При все това ЗФС остава нерешена, защото няма възможност за гаранции за безбройно многото възможни събития и смущения, които не са тествани. Изследователят може да създаде математически модел на физическата система и нейната среда, но математическото множество от модели може само приблизително да отразява актуалните динамики на физическата система. Повечето изследвания се отнасят до математически идеализации на разглежданата задача (**МИЗ**). МИЗ може да бъде формулирана по следния начин:

**МИЗ:** за математическите модели, да бъде гарантирано, че напреженията, деформациите, ускоренията и преместванията (всички наречени изходи) за определени места на структурата остават в определени граници в присъствието на произволни смущения по-малки от известни ограничения за енергия.

При зададен клас от математически модели за системата, трябва да бъдат избрани параметрите на проектирането (параметри, които подбират типа и местата на въздействие, параметри, които подбират типа и местата на замерване, и параметрите на управляващото устройство), за да се гарантират избраните ограничения, наложени върху изходите на ответната реакция. Поради липса на налична математическа техника, дори тази **МИЗ** може да бъде решена само, ако класът от модели е достатъчно прост (линеен). Моделите идват от два източника: от идентификация от данните от вход и изход, или от изначалните принципи. И двата дават система от обикновени или частни диференциални уравнения. Тези „модели“ се използват, за да се правят предвиждания за динамичната реакция.

Под **модел на структурата** ние разбираме системата от математически модели на управляващите устройства, датчиците, структурата и външните смущения, пресмятанията в затворената верига на управлението. Частният случай на смущение води до частен модел, който дава частна динамична реакция. Основна мотивация за употребата на математически модели е, че аналитичните предсказания (ограничения върху ответната реакция и др.) не се ограничават с отделни събития, а могат да се прилагат към всеки случай попадащ в множеството или класа модели. Без модели ще са необходими неизброимо число тестове или компютърни симулации, за да се даде съответният отговор. Дори чрез модели, някои видове граници се поддават трудно.



Фигура 1.3. Схема на задачата за структурно управление

Почти винаги се налага редукция на модела, за да се получи използваем модел за анализ или синтез на управление. Затова при редукция на модел, по подразбиране, винаги може да бъде изхвърлена важна информация. При проектиране на управляващите устройства не съществува теория, която може да подбере най-добър модел (или дори подходящ). Затова моделирането при синтеза на управление остава да бъде жизнено важно при изследванията. Разширяването на класа от ИРЗ, които могат да бъдат решени математически е предмет на изследване в теорията на системите и управлението през последните 40 години. Подобно изследване цели да разшири големината на грешки при моделирането, която може да бъде допусната. Приема се, че грешките са ограничени по норми от различен тип, и че съществува неопределеност (в структурата и в смущенията) в модела на системата, които също са ограничени по норма. Нормите могат да бъдат от смесен тип, такива като минимизиране на една норма, докато се удовлетворява ограничение върху друга норма [32].

Да разгледаме блок диаграмата на Фиг.1.3, където  $y$  е векторът на измерванията от датчика, и  $z$  е векторът на „изходите по качество”, които ще се използват, за да се оцени качеството на цялата система.  $y$  и  $z$  могат да съвпадат или да не съвпадат. Не винаги е възможно да бъдат замервана величината, която искаме да управляваме. В зависимост от динамиката на системата е възможно да бъде постигнато по-добро качество (векторът  $z$  да се поддържа по-малък) като се използват различни множества от измервания  $y \neq z$  отколкото измервайки тези величини, които искаме да управляваме  $y = z$  [33]. Изборът на датчици и управляващи устройства и тяхното разполагане остава отворен въпрос за изследване.

**Системи с активно управление** се използват при сгради подложени на вътрешни или външни възбуждения, такива като шум от трафик и машини, вятър, или земетресения за осигуряване на сигурност и комфорт на обитателите. Тук се използват активни и хибридни масови дъмperi, управляващи устройства тип ресори, които могат да употребяват хидравлично, пневматично, електромагнетично, или винтово моторно задвижване. Това прави тези системи уязвими към загуба на мощност, което винаги е възможно по време на силно земетресение. Фиг.4 илюстрира система с една степен на свобода с активно управление.



Фигура 1.4. Активно управление  $m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = u$

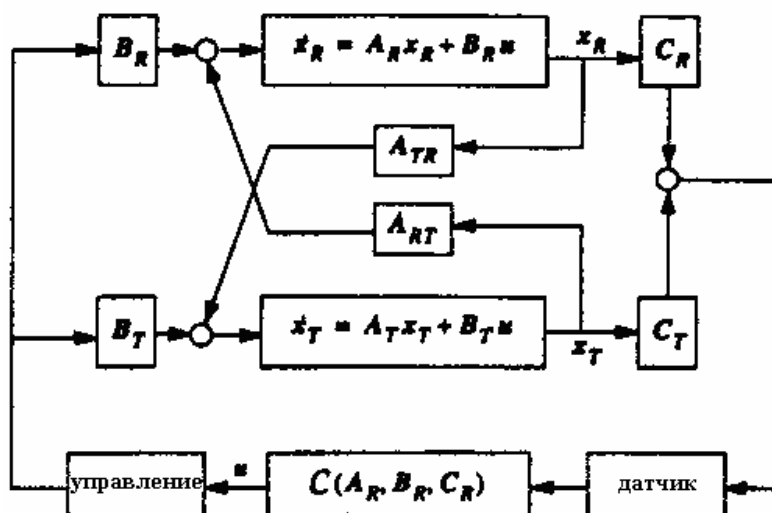
Тъй като системите с хибридно и активно-пасивно управление са системи с активно управление, при изследванията трябва да се осигури, че системата не губи устойчивост поради пренебрегването на динамиката на датчиците и управляващите устройства, въпреки че по принцип системата може да е устойчива.

**Системи с полуактивно управление** имат привлекателната черта, че външната енергия, която се изисква за тяхната работа, е на порядъци по-малка от тази за активните системи. Всъщност, много от тях могат да работят на мощността на батерия, което е критично по време на сеизмични ситуации, когато повечето източници на енергия към структурата могат да спрат да работят. Предварителните изследвания показват, че подходящо използваните полуактивни системи функционират значително по-добре от пасивните устройства и имат потенциала да достигнат, или дори да надминат, качеството на напълно активните системи, позволявайки по този начин възможността за ефективна редукция на реакцията по време на широк клас от разглеждани динамични натоварвания [34].

Активното управление може да подобри динамичната реакция на структурата. Но то също може да я влоши. Условието за устойчивост се нарушават в практиката при реален хардуер, когато динамиката на управляващото устройство или датчика е пренебрегната неоснователно (Фиг.1.4).

На Фиг.1.5 е показана схема, при която е възможна неустойчивост заради грешките от моделирането. Управляващото устройство  $C(A_R, B_R, C_R)$  е синтезирано да стабилизира и подобрява модела  $(A_r, B_r, C_r)$ . Но излишъкът от управление  $B_r u(t)$  възбужда немоделираните състояния  $x_r$ , което води до изкривяване на сигналите от датчика  $C_r x_r(t)$ . Управляващото устройство няма да дестабилизира затворената верига на системата, ако  $x_r$  е или неуправляем (т.е.  $A_{rR} = 0, B_r = 0$ ) или ненаблюдаем (т.е.  $C_r = 0, A_{rR} = 0$ ). Но степента на наблюдаемост или управляемост на немоделираната динамика е трудно да бъде оценена в практиката.

Има четири типа на моделиране на грешките (параметрични грешки, грешки в реда на модела, пренебрежими смущения, пренебрежими нелинейности) и няма теория на управлението, която може да разглежда едновременно всичките четири типа. Теориите на робастното управление делят класовете от грешки, които могат да



Фигура 1.5. Блок диаграма на системата

бъдат допускани. Мъдро подбраната редуция на модела може да помогне да бъде редуцирано влиянието на реда на грешките на модела.  $H_\infty$  управлението може да помогне при  $L_2$  смущения. Игнорирайки други типове грешки и фокусирайки само върху един тип може да доведе до неправилни изводи. Например, изнасянето на полюсите дълбоко в лявата половина на комплексната равнина може да помогне при параметрични грешки [35], но ще увеличава възбудането на управляеми немоделирани динамики  $x_r$ .

Интердисциплинарните изследвания на постмодерната ера са все още в своето детство. Все още няма отговор на простия въпрос: „Как да се проектира управляващо устройство, което да ограничава пиковете напрежения в присъствието на произволно движение при земетресение със сила  $X$ ?” Постигнатите резултати се основават широко на задоволителните компютърни симулации. Симулациите са твърде убедителни, когато системата е консервативна, защото тя не може да бъде дестабилизирана от грешки в параметрите на синтеза. Но неустойчивост може да бъде предизвикана от активно управление по обратна връзка, ако грешките при моделиране са достатъчно лоши и управляващата енергия е достатъчно голяма. При липса на доказани аналитични гаранции за качество в присъствие на грешки от моделиране, не може да се очаква да бъдат променени строителните кодове с цел да позволят проектиране на активно управление. Симулациите и реалните тестове са част от проектирането. Аналитичните резултати помагат като ръководещи и намаляват броя на итерациите необходими при проектирането на реалната система.

Процесът на **моделиране за синтез на управление** е труден и отворен за изследване процеси, който заслужава известен коментар. Не съществува теория, която да дава модел, който е подходящ за синтез на управление, защото моделирането и синтезът на управление не са независими задачи. Съществува взаимозависимост между тези две задачи. От тази гледна точка, най-сериозният недостатък на модерната теория на системите е липсата на теория, която да разглежда тази взаимозависимост.

Изглежда ясно, че развитието при проектирането на строителни структури в постмодерната ера с цел да включи концепции за управление по обратна връзка

трябва да бъде придружено от задължението към прогресивни аналитични теории, които да предвиждат качество по прецизно. Това характеризира силните и слабите страни на съществуващите аналитични техники в теория на системите и теория на управлението така както те се прилагат към строителните структури.

Аналитичните теории в активното управление на структури има дълга история. Тук могат да се споменат оптималното управление, стохастичното управление, адаптивното управление, управление с невронни мрежи, модално управление, робастно управление. Тук ще се ограничим с представянето на оптимално и робастно управление, където синтезът включва минимизирането или максимизирането на измерване на качество, и на стохастично управление, където моделът, както и някои неопределености се описват с помощта на случайни величини или процеси спрямо параметрични грешки или външни смущения.

Думите „оптимално управление” се подразбира „най-добрият” синтез по някакъв критерий. Най-често използваните квадратични функции обикновено нямат физически смисъл, но се използват да дават тегло на две части, всяка от които има физическа значимост – нормата на изходите и управляващата енергия. Синтезирането на оптимално по квадратичен критерий управление дава ограничения върху някои изходи. Тези знания дават важна информация, свързана с моделирането. Можем да се върнем назад и опитаем да подобрим качеството на модела по отношение на замерваните изходи. Такъв итеративен софтуер за моделиране и управление се дискутира в [36]. Преди да бъде синтезирано управлението, не може да се получи знание за неговата сложност. В този план моделирането и синтезът на управление си взаимодействат. Специалният избор на тегла в задачите на квадратичното оптимално управление води до специални резултати.

Често оптимизационните критерии имат безкраен хоризонт. Целеви функции с краен хоризонт също се използват, като в този случай интегрирането по времето е крайно. Такива управляващи стратегии имат константи, зависещи от времето, но са много полезни при управление, моделирано за предвиждания, където крайният хоризонт  $N$  представлява прозорец, върху който моделът се смята надежден [37]. При класическия подход [38] управлението може да бъде пресметнато чрез решаването на две зависещи от времето уравнения на Рикати, но тези уравнения на Рикати в пространството на състоянията. Предимство е, че за крайно  $N$  оптималното управление може да бъде синтезирано, като се използва по-малко информация отколкото пълния модел на системата.

Цялостната постановка на задачата за оптимално управление включва характеристика на смущенията и на класа на моделите. Началните условия за състоянието могат да бъдат представени като подходящ импулс на входа. Смущенията се делят на детерминирани и стохастически. При двата най-разпространени модела на детерминирани смущения (1) импулсите се прилагат едновременно на всички входни канали като целевата функция интегрира реакцията на това общо въздействие; и (2) импулсите могат да се приложат към всеки входен канал един във всеки даден момент като целевата функция представлява сума от интегралите на ответната реакция на всяко импулсно въздействие. Тази задача се нарича линейно квадратично управление по входове (ЛКВ). Когато смущенията се предполагат случайни (бял и цветен шум), системата става стохастическа и тогава целевите функции се заместват с интегралите от

математическото очакване пораждайки така нареченото линейно квадратично Гаусово управление (ЛКГ). Съответните математически задачи за ЛКГ и ЛКВ управление са идентични, с незначителни разлики в уравненията на Рикати при членовете идващи от силата. Съществуват и управления, синтезирани на основата на целеви функции от по висока степен на състоянията [39]. Тези управления са предназначени за движение, което се отклонява повече от изначално предвиденото, и независимо, че са по сложни от ЛКГ и ЛКВ управленията, поддържат състоянието на системата по-близо до началното.

**Оптимална комбинация от пасивно и активно управление.** Да предположим, че има параметри в матриците на масата, коравината и дъмпинга, които могат да бъдат променяни (в определени граници) чрез пасивно управление. По нататък, използвайки номиналните параметри на структурата, да предположим, че е дадено линейното управление, което поражда „идеално” качество (според всеки избран критерий). Тогава синтезът на управлението и изборът на структурните параметри може да се извърши отново едновременно, запазвайки динамиката на „идеалната” система със затворена верига. Тази едновременна оптимизация на параметрите на структурата и на управлението позволява редукция на енергията на активното управление съхранявайки същото качество. Резултатите от такава минимизация ние наричаме „оптимална комбинация на пасивно и активно управление”. Когато синтезът на минимално по енергия активно управление даде нула енергия за управление, оптималното управление е изцяло пасивно. При всички случаи, такова управление използва възможно най-малката енергия за активно управление при някои ограничения върху качеството и върху структурните параметри. Числено решението на задачата за „оптимална комбинация” се постига чрез квадратично програмиране, така че сходимостта е бърза и се гарантира глобално оптимално решение [40].

**Стохастичното управление** обхваща редица функции:

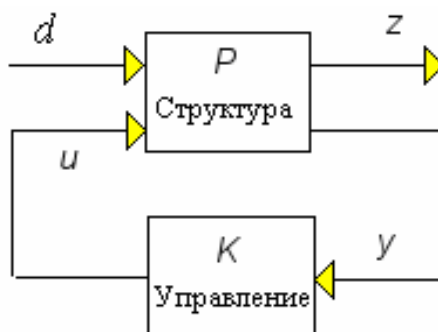
- Определяне на политиката на управления за дадена динамична система, подложена на случайни смущения, с възможни шумове при измерванията на изхода, с цел да се достигне някаква цел;
- Оценяване на състоянията на динамична система от непълни и с шумове замервания на изходите;
- Синтез на управление, целящо някаква предписана статистика от втори ред;
- Оценяване на робастността на динамична система по отношение на неопределеност в нейните параметри и входове;
- Идентификация на параметри и на системи.

Концепции като случайност и неопределеност в научните изследвания възникват главно, защото използваните модели представят дадени физически явления приблизително и, следователно, изискват допълнителни мерки за оценяване на недостатъка от пълна информация. Независимо, че вероятностните подходи са били използвани още преди около 200 години, Колмогоров, едва преди 70 години, формулира техниката на вероятностите, правейки я използвана при математическо моделиране. В частност, теми като оценяване на състояние и оптимално управление в присъствие на шумове са се появили едва след първите работи на Колмогоров през 30-те години на миналия век. От тогава са получени много резултати в областта на стохастическото оптимално по време управление, оценяване на състояния,

ковариантно управление и робастно оценяване. Управляването на строителни структури в този комплекс от изследвания носи множество от уникални задачи. На първо място това е заради размерите – строителните структури са масивни и поради това изискват огромни сили за въздействие. Веднага следва моделирането – съществува неопределеност както в самата природа на структурата така и във външните сили, което е очевидно. Накрая, това е замерването – структурите са безкрайно мерни и не напълно наблюдаеми от датчици, поставени в отделни точки; също така датчиците са свързани с шумове при замерванията. Последните два от тези проблеми могат да бъдат адресирани към различни аспекти на теорията на стохастическото управление.

**Робастното управление** е насочено към качество и устойчивост в присъствие на неопределеност, както при параметрите на системата, така и при външните входове, на които тя е подложена [41]. Развитие на теорията на робастното управление се мотивира от невъзможността на ЛКГ/ $H_2$  теорията да включи директно неопределеността на системата. По този начин, робастност на системата със затворена верига би могла да се гарантира на известно ниво на неопределеност само в последствие. Потребността, неопределеността да бъде разглеждана в систематичен порядък, води до разработването на  $H_\infty$  проблема, макар и главно в честотната област, употребявайки по времеви характеристики, такива като проблематиката за ограниченията при насищане. По съвременното развитие на  $H_1$ , която разглежда достижимо качество във времева област пи неопределеност, преодолява много от тези недостатъци, тъй като дава идеята за многокритериални формулировки. Но това е извън целите на този труд.

**Основни идеи.** Едно просто обяснение на  $H_\infty$  теорията може да бъде следното. Да разгледаме основната блок диаграма структура-управление на Фиг.1.6.



**Фигура 1.6.** Диаграма за робастно управление

$u$  е векторът на измерваните изходи,  $z$  е векторът на реакциите, които ние искаме да управляваме,  $u$  е векторът на управляващите входове, и  $d$  е векторът на смущенията входа. Векторът  $x$  може да съдържа произволна комбинация от състоянията на структурата и компоненти на  $u$ . При синтезирането на управление могат да бъдат формулирани множество цели чрез подходящ избор на елементите на  $x$ . Могат да бъдат добавени тегла към елементите на  $z$ , за да бъде фиксиран интервалът, върху който даден елемент се минимизира. Така системата във Фиг.6 може да съдържа не само структурата, но и описания на филтри и тегла в честотната област. Целта на  $H_\infty$  управлението е да синтезира стабилизираща управляваща стратегия, такава че

безкрайната норма на предавателната функция от  $\mathbf{d}$  към  $\mathbf{z}$  да бъде минимизирана. Тази предавателна функция съдържа мерки на номиналното качество и/или робастна устойчивост. Математически това може да бъде формулирано по следния начин: да се определи управление  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ , което да минимизира безкрайната норма на предавателната матрица  $\mathbf{H}_{zd}$ .  $\mathbf{H}_\infty$  нормата дава мярка за реакцията на системата в най-лошия случай за цял клас от смущения на входа. Решението за закона на оптималното управление се основава на решението на уравнението на Рикати.

$\mathbf{H}_\infty$  теорията е намерила **приложение за редица строителни структури** [37,42]. В една от най-ранните работи в това направление също е направено сравнение между  $\mathbf{H}_2$  и  $\mathbf{H}_\infty$  подходите [43]. По нататъшни изследвания разглеждат робастно управление за големи структури. Разглеждат се неопределеност в параметрите на системата, променяща се във времето, проблемите на насищане на управляващото устройство. Изследват се възможностите структурите да се изолирани при основата както и употребата на многократно настройващ се масов дъмпер за управление. Срещат се разработки със комбинирана техника на робастно управление и оценка на полюсите на структурата, както и с управляващи устройства с възможности за обучение. Редуцирането на реда на управляващото устройство е важен практически въпрос застъпен в литературата.

В литературата се разглеждат стратегии за **полуактивно управление**, основаващи се на полуактивни устройства. Те се разработват с цел да комбинират най-добрите качества на системите с пасивно и активно управление и да предложат най-правдоподобни решения, които да могат да бъдат приети в най-близко бъдеще в практиката като осъществими средства за защита на строителните структури срещу земетресения и силни ветрове. Вниманието, което те получават последните години, може да се обясни с факта, че устройствата за полуактивно управление предлагат приспособимостта на устройствата за активно управление без изискването за големи енергетични източници. Според определенията, приети понастоящем, устройство за полуактивно управление е това, което не може да създаде механична енергия в управляващата структурна система (структурата и устройството за управление), но има свойства, които могат да бъдат контролирани, за да бъде намалена оптимално реакцията на системата. За разлика от устройствата за активно управление, устройствата за полуактивно управление нямат потенциала да дестабилизира (в смисъл на ограничен вход и ограничен изход) структурната система. Предварителните изследвания показват, че подходящо изпълнената система с полуактивно управление се държи значително по-добре от пасивно управлявана, и има потенциала да достигне голямата част от качествата на системите с активно управление. Така тя дава възможност за ефективно редуциране на реакцията при широк спектър от условия на динамично натоварване [34]. Има примери на устройства за полуактивно управление с променливи флуидни дамperi, устройства с управляемо променливо триене [44], устройства с променлива коравина, управляеми флуидни устройства, както и управляеми ударни устройства.

Поради съществено нелинейното естество на устройствата за полуактивно управление, разработването на стратегии за управление, които са практически изпълними и могат пълноценно да използват възможностите на тези уникални устройства, е важна и предизвикателна задача. Разработени са множество нелинейни

стратегии за управление, които използват предимствата на отделните характеристики на тези устройства, включително релейно (bang-bang) управление, орязано (truncated) управление, управление в две състояния, фъзи управление, нелинейно адаптивно управление и др.

Друга важна област в изследванията е интегрирането на системи. Структурните системи са сложни комбинации от отделни структурни компоненти. Интегрирането на стратегии за полуактивно управление директно в основното проектиране на тези сложни системи може да предложи оптимална комбинация за подобряване на качеството срещу оскъпявания на конструкциите и дълготрайни ефекти. Когато бъдат добре изследвани и напълно признати предимствата на системите с полуактивно управление, от първостепенна задача за бъдещето е разработването на прототипи и стандарти или уточняване на допълнения към съществуващите стандарти.

Употребата на **материали от ново поколение** (интелигентни, умни, иновативни, адаптивни, сетивни и т.н.) предлага друга възможност за управляването на динамичните движения на структури. Това са материали, които имат необичайни физически свойства, които могат да бъдат използвани за целите на структурното управление. Интересът към тези материали по отношение на перспективите за интелигентни инфраструктурни системи е тяхната възможност да минимизират разходите за дълговечност на системите чрез максимизиране на тяхното качество чрез техните адаптивни възможности. Изследователите се опитват да използват идеи от природата, за да създадат нови материали, които да могат да променят своите структурни характеристики, да наблюдават за своето добро състояние, да извършват само-диагностика и само-поправка, да променят своя форма, да управляват своето движение, да имат значителна степен на автономия, което ще позволи да бъде оптимизирана тяхната мисия. Следва да се наблегне на факта, че погледнато откъм приложение няма разлика между интелигентна структура и структура със система с интелигентни материали.

Една от характеристиките на биологичните материали, която представлява огромен интерес за научното общество, е потенциалът за внедряване в бъдещата строителна инфраструктурна система възможността за „дълговечна политика”. Тази черта може да бъде наподобявана в модерните материали чрез използването на датчици за подобряване качеството на производствения процес, наблюдение на състоянието на системата по време на нейното съществуване, и комбиниране употребата на датчици и управляващи устройства, за да се видоизменя поведението на структурата като реакция на епизодични повреди по време на нейното съществуване. Евентуално, когато процесът на остаряване е достигнал своята граница, оценяването на условията за структурата, осигурени от внедрените датчици, може да определи времето за „пенсиониране” за структурата.

Нека отбележим, че една интелигентна система, за да изпълнява функцията, за която е предназначена, трябва да е способна да диагностицира своето състояние и структурна деградация, за да определи как нейните компоненти следва да се променят в отговор на принудителен товар. Важна област, в която могат да се използват нови материали в интелигентна строителна инфраструктурна система е като част от материалите с необработена конструкция. Един подход, който е демонстриран в лабораторни условия използва внедрени маркиращи методи, основаващи се на

частици с размери на микрон, за да добави мониторинг на материалите на конструкцията.

Материалите с възможности да работят като управляващи устройства дават възможност на интелигентните структури да се приспособяват към променящата се околна среда [45–46]. Такива материали могат да променят свята коравина, форма, позиция, дъмпинг, собствена честота, вискозност, и други свойства в отговор на вибрации в електрическо поле, магнитно поле или температура. Например, управляващи устройства с принудени деформации са системи от материал, който произвежда деформации в отговор на приложени стимули като температурен градиент, електрическо поле, магнитно поле и др. Получените деформации се използват да управляват геометричната конфигурация и механичните свойства на структурата с цел прилагането на управлявани сили. Измежду тези материали са пиезоелектрическите материали, магнетореологичните материали, сплавите с памет за форма (*shape memory alloys*). Ще припомним, че сами по себе си тези материали не са умни; те се базират на интегрирана система от материали, датчици, обработване на информация, комуникации и управление за да покажат възможности за интелигентност.

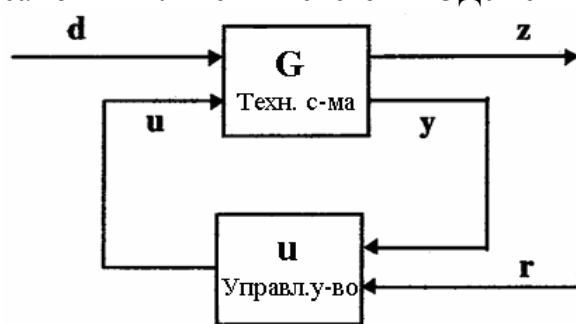
## 1.3. Уводни бележки

### 1.3.1. Системи с управление: Основни дефиниции и концепции

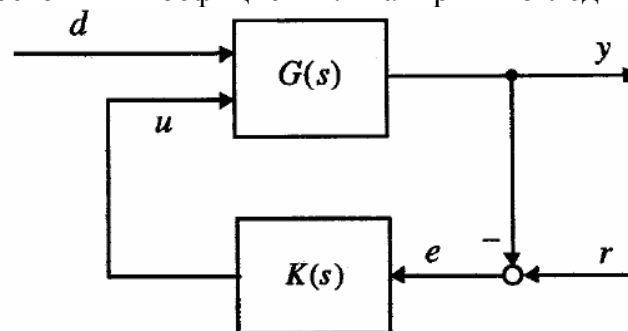
Разглеждаме техническа система  $G$  с два входа и два изхода. Единият от входовете, **управлението  $u$** , може да бъде предварително определен, докато другият, **смущението  $d$** , се предполага неизвестно. Предполагаме, че един от изходите, **измерването  $y$** , може да бъде измерван, а за другия изход, **променливата за управление  $z$** , се желае да има определено поведение. За тази цел е необходимо **устройство за управление  $K$** . Управляващото устройство  $K$  има измерване  $y$  и **управляващ сигнал  $r$**  като входове. Управляващият  $r$  сигнал определя желаното поведение на  $z$ . Изходът на управляващото устройство е управлението  $u$ . Такава система се нарича **система с обратна връзка** (Фиг.1.7).

Модерното проектиране на управляващо устройство винаги изисква математически модел на техническата система. Това означава, че техническата система  $G$  във Фиг.1.7 се заменя със система обикновени диференциални уравнения (ОДУ) или частни диференциални уравнения (ЧДУ) или комбинация от двете. Тук разглеждаме методи насочени към системи, управлявани от ОДУ. В повечето случаи системата ОДУ е нелинейна. Методите, които разглеждаме тук се прилагат директно

само към линейни системи ОДУ с постоянни коефициенти. На пръв поглед това



Фигура 1.7. Система с обратна връзка



Фигура 1.8. Обратна връзка с грешка

изглежда много ограничително, но в повечето случаи тези методи работят ефективно и при нелинейни системи, той като обикновено се налага техническата система да бъде управлявана само в околност на точка на равновесие. Такава точка е константно решение на диференциалното уравнение за константни входове. Близко до точката на равновесие техническата система може да бъде апроксимирана с линейна система. Може да се опонира, че управляващият сигнал или силно смущение биха могли да изведат системата твърде далеч от точката на равновесие. В такива случаи е възможно да се използва техника, представляваща списък от решения, или нелинейността да се интерпретира като неопределеност за линейната система.

Имайки предвид тези обяснения, в този труд техническите системи ще бъдат разгледани като линейни системи ОДУ с постоянни коефициенти, които се допълват с две системи линейни уравнения за двете променливи при изхода:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{d} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{d} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{d} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}.$$

Това ще се нарича **линейна система**. Математически, управляващото устройство също е линейна система:

$$\dot{\mathbf{x}}_K = \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{B}_{K1}\mathbf{r} + \mathbf{B}_{K2}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K + \mathbf{D}_{K1}\mathbf{r} + \mathbf{D}_{K2}\mathbf{y}.$$

Да се построи управляващо устройство означава да се намери такава система, която удовлетворява известни изисквания. Ако хардуерът на управляващото устройство е микропроцесор, тези уравнения трябва да бъдат програмирани в процесора, но тази стъпка тук няма да бъде обсъждана.

Първоначално ще набележим някои основни идеи, които водят до успешно построяване на управляващи устройства. Ако пренебрегнем разликата, идваща от грешки при измерването, то  $y$  и  $z$  могат да се приемат за равни. Тогава можем да изберем грешката на управлението  $e = r - y$  като вход за управляващото устройство. Подобна концепция може да бъде приложена към задачи за системи с **един вход и един изход**. Тогава обратната връзка (Фиг.1.7.) може да бъде представена както във Фиг.1.8. Тук  $G(s)$  и  $K(s)$  са предавателните функции на линейната техническа системи и на управляващото устройство.

Нуждаем се от методи за определяне на  $K(s)$ . Необходимо е да формулираме целите на синтеза. Преди всичко системата с обратна връзка на Фиг.1.8 трябва да бъде **устойчива**. Устойчивостта означава, че за постоянни входни данни изходът  $y(t)$  е ограничен при  $t \rightarrow \infty$ . Нещо повече, изисква се минимално качество на синтеза: За постоянни входове  $r$  и  $d$  грешката на управлението  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Да предположим, че техническата система  $G(s)$  е устойчива и нека законът за обратна връзка бъде просто пропорционален  $K(s) = k_p$  ( $k_p$  е константа). Ако  $k_p$  е достатъчно малка, системата с обратна връзка ще бъде устойчива, но целите на синтеза относно грешката на управлението като цяло няма да бъде изпълнена. Така добавяме интегрална част към пропорционалното управление да подава обратно също и интегрираната грешка на управлението. В известен евристичен смисъл можем да твърдим, че за устойчива система с обратна връзка интегралът става константа, което означава, че  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . По-комплексни изисквания за веригата на обратната връзка могат да бъдат изпълнени, ако грешката на управлението е не само интегрирана но и диференцирана. Това води до така нареченото ПИД управление, което може да се представи с формулата

$$K(s) = k_p \frac{1 + T_N s + T_N T_V s^2}{T_N s (1 + T_0 s)}$$

За системи с един вход и един изход това е популярно стандартно управление. Едно от основанията за това е, че съществуват прости методи за синтез на ПИД управлението, и че ролята на параметрите на ПИД управлението могат да бъдат обяснени много добре.

Има два основни типа цели при синтез на управление, именно, **качество** и **робастност**. Изискванията за качество са малка грешки при следене, висок предел и добър дъмпинг на системата с обратна връзка, управляващото усилие, което трябва да бъде реализирано чрез управляващото устройство и т.н. Робастност означава, че управлението работи не само за линейната система, която служи като модел на техническата система, но също с много малко влошаване на качеството работи и за реалната физическа система. Реалната система винаги се отличава от линейния математически модел. Най-важните видове неопределеност са **параметрическата неопределеност** и пренебрегнатите **високо честотни динамики**. Друг източник на неопределеност е пренебрегнатата взаимозависимост при системи с **много входове и много изходи**. Обикновено качеството и робастността са противоречащи си цели за синтеза. При класическото ПИД управление могат да бъдат гарантирани известна основни свойства на качество и робастност чрез осъществяването на определено поведение на предавателната матрица  $L$  на веригата.

Нека се спрем на един различен начин за синтез на управление. За дадена обобщена техническа система с вектор на състоянието  $x$ , в обратната връзка се включват всички състояния и закона за управление има следния вид

$$u = Fx \tag{1.1}$$

където  $F$  е матрица. Идеята тук е, че с такъв подход полюсите на системата с обратна връзка могат да се предвиждат много добре, така че винаги може да се постигне устойчивост. По-точно, при смислени предположения може да се покаже, че  $F$  може да бъде намерена такава, че затворената верига на системата да има произволно назначени полюси. Чрез добавяне на интегрирана грешка на управлението като допълнително състояние, винаги може да се изпълни перфектно следене. Такъв вид синтез на управление е създаден в началото на 1960-те години под името „метод в пространството на състоянията”.

Съществува проблем, когато не всички състояния на системата могат да бъдат измервани. Тогава, при някои олекотени предположения, е възможно състоянието на системата да бъде оценено от измерването  $y$ . Това води до наблюдателя на Луенбергер. Законът на управление (1.1) се прилага към оценката  $\bar{x}$ . Използвайки ур. (1.1), такъв наблюдател може да се изпише в следната форма:

$$\dot{\bar{x}} = A_g \bar{x} - Ly . \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) описват управлението. Матрицата  $A_g$  може да се изрази чрез матриците  $F$  и  $L$  на техническата система, така че синтезът на управлението се състои в намирането на тези две матрици.

Една възможност тези две матрици да бъдат намерени е изборът на подходящи места за полюсите, който работи също за наблюдателя. Но има някои цели на синтеза, които не могат да бъдат обхванати по този начин. Например, относно  $F$  това е усилието на управлението и относно  $L$  това е грешката при измерването. Идеята тук е да бъдат формулирани целите на синтеза така, че да бъде минимизиран даден функционал. За управление (1.1) с обратна връзка по състоянията това е

$$\int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt$$

с подходящо избрани матрици  $Q, R$ . Усилието на управлението се определя от матрицата  $R$ . Резултатът е линейно квадратичното управление ЛК. Ако се изисква наблюдател, тази концепция трябва да се обобщи и води до така нареченото ЛКГ управление (грешката от измерването и смущението на техническата система трябва да бъдат гаусови стохастически процеси). ЛКГ управлението е комбинация на ЛК управление и на известния филтър на Калман. Двата ЛК и ЛКГ управление са частни случаи на  $H_2$  оптималните управления. Матриците  $Q, R$  отразяват свойствата на качеството на обратната връзка. Независимо от този факт ЛК управлението има някои благоприятни робастни качества подобни на тези на ПИД управлението. Като цяло тези качества се губят, ако се добави наблюдател. Друг недостатък на ЛК и ЛКГ подхода е фактът, че не е лесно целите да се преведат в адекватен избор на матриците  $Q, R$ .

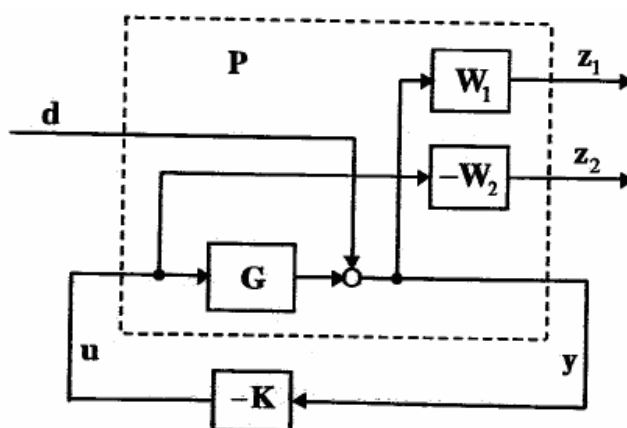
ЛК и ЛКГ управленията се вписват в общата рамка за обратна връзка (Фиг. 1.7). За LQ управлението имаме  $y = x$ , и ако не е добавен интегрален член за следене, редът на управлението е нула. С общ наблюдател редът на управлението е равен на реда  $n$  на техническата система (респективно  $n+1$  броя на интегралните членове). ЛК и ЛКГ управленията се синтезират в пространството на състоянията, но изискванията към

качеството се формулират по-естествено в честотната област. Така се стига до въпроса за метод за синтезиране, който може да бъде приложен директно към изискването за качеството в честотната област. За да се даде идея как това може да се постигне, да предположим, че смущението (Фиг. 1.8) е просто добавено към изхода на  $G$ . Тогава предавателната функция от  $d$  към грешката на управлението  $e$  е така наречената **функция на чувствителността**  $S$  и е в сила следното уравнение:

$$\hat{e} = -S\hat{d}, \quad \hat{u} = -KS\hat{d}.$$

Свойствата на  $S$  за отхвърляне на смущенията могат да бъдат определени чрез честотно-зависимо тегло  $W_1$ , което се характеризира с голяма абсолютна стойност при малки честоти, докато абсолютната му стойност е ограничена за големи честоти. Усилието на управлението се изразява чрез предавателната функция  $KS$ , която може да бъде определена чрез второ тегло  $W_2$ . Така изискванията към качеството могат да се формулират със следните неравенства:

$$|S(i\omega)W_1(i\omega)| \leq 1, \quad |K(i\omega)S(i\omega)W_2(i\omega)| \leq 1. \tag{1.3}$$



Фигура 1.9. Система с обратна връзка и с честотно зависими тегла

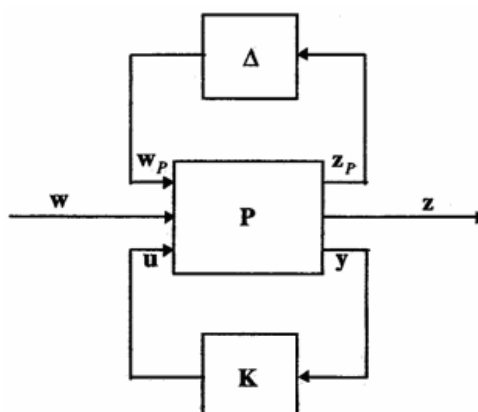
Удачно е да се дефинира една разширена техническа система  $P$ , която съдържа оригиналната техническа система  $G$  и теглата (Фиг.1.9).

Нека да дефинираме предавателната функция на затворената система  $F_{zd}$ , която изобразява  $d$  върху  $z = (z_1, z_2)$ . Дефинираме норма на този оператор  $\|\cdot\|_\infty$  ( $H_\infty$  норма) така че.

$$\|F_{zd}\|_\infty \leq 1 \tag{1.3}$$

изразява точно условие (1.3). Тази идея може да бъде обобщена с резултата, че характеристика на управлението в честотната област води до изискване във вида (1.3) за  $H_\infty$  нормата на определен оператор, който описва входно-изходното поведение на системата с обратна връзка, и който се отнася до разширената техническа система  $P$ . За ЛКГ случая управлението може да се изпише като комбинация на обратна връзка по състояния и наблюдател, но при по-детайлно разглеждане, съществуват някои важни разлики. Редът на управлението е редът на разширената техническа система.

$H_\infty$  управлението, построено на основата на схемата от Фиг.1.9, има робастни свойства, които са породени от теглата на  $S$ . За **структурна неопределеност**, която, например, се дава чрез комбинация на параметрическа неопределеност и пренебрегнати динамики при входа на техническата система, нещата се усложняват. Тогава робастната устойчивост може да се опише чрез така наречената **структурна сингулярна стойност  $\mu$** . Неопределеността трябва да бъде специално моделирана по начина показан на Фиг.1.10, която обобщава Фиг.1.9. Тук  $\Delta$  представлява неизвестно, но устойчива предавателна функция. Честотната зависимост на немоделираната динамика или неточностите на параметрите на техническата система са внедрени в техническата система чрез използването на подходящи тегла (в допълнение към теглата за качеството). Задачата тук е да се намери управление, при което системата с обратна връзка е не само устойчива за всички позволени смущения  $\Delta$  (**робастна устойчивост**), но също изпълнява характеристики на качеството за всички тези смущения (**робастно качество**). Максималният размер на позволените смущения може да бъде изразен чрез структурната сингулярна стойност  $\mu$  на системата с обратна връзка, състояща се от  $P$  и  $K$ . Математическото средство за синтез на управлението е така наречената **D-K** итерация. Редът на управлението за такова робастно управление е типично висок.



**Фигура 1.10.** Неопределена система с обратна връзка

### 1.3.2. Основни стъпки при синтез на управление

В този параграф се определят основните стъпки, необходими за синтез на управление, и някои обяснения какво трябва да се направи във всяка отделна стъпка. Всички тези стъпки са необходими във всеки разглеждан случай.

- Стъпка 1.** Построяване на математически модел на техническата система и симулация.
- Стъпка 2.** Определяне и изчисляване на точките на равновесие и изчисляване на линеаризирания модел. Анализ на линеаризирания модел.
- Стъпка 3.** Синтез на „просто стандартно“ управление.
- Стъпка 4.** Определяне на теглата за качество. Синтез на  $H_\infty$  (или  $H_2$ ) управление.
- Стъпка 5.** Определяне на структурата с неопределеност и на теглата за

неопределеност.

**Стъпка 6.** Анализ на устойчивостта на „простото“ управление.

**Стъпка 7.** Синтез на  $\mu$  управление. Намаляване на реда на управлението.

**Стъпка 8.** Симулация на системата с обратна връзка с линеаризирания и пълния модел.

**Стъпка 9.** Тест на управлението в система с реално управляващо устройство и тест на управлението в реалната система.

**Стъпка 1.** Построяването на математически модел на физическата (техническата) система означава, че трябва да се приложат физически закони, за да се намерят диференциалните уравнения, които управляват динамиката на системата. Тези уравнения могат също да бъдат намерени чрез идентификация или чрез комбинация на двата метода. При всички случаи трябва да се вземе решение на какво ниво на детайлност ще бъде построен математическия модел. Това изисква добра преценка и известен опит. Когато се намери системата диференциални уравнения, която управлява реалната техническа система, трябва да се направи компютърна симулация. При симулацията тук е използван MATLAB. Няма проста рецепта за построяването на модел, която да бъде приложима за всяка възможна ситуация. Трябва да се разберат основните свойства на физическата система, което е необходимо по-късно при синтеза на управлението.

**Стъпка 2.** В следващата стъпка, трябва да бъдат определени и пресметнати точките на равновесие. Математически, те са решения на множество от нелинейни алгебрични уравнения. Може да се окаже, че не всички точки на равновесие, които са математически възможни, са смислени от инженерна гледна точка, затова те трябва да бъдат подбрани внимателно. За дадена точка на равновесие трябва да бъде пресметната линеаризирана техническа система като се приложи стандартна процедура. Трудности се срещат, ако нелинейностите са недиференцируеми, което се среща рядко.

Когато се създаде линеаризираният модел, трябва да бъдат използвани неговите основни свойства. Най-важните от тях са стабилизируемост и наблюдаемост. Те трябва да бъдат удовлетворени, за да се намери стабилизиращо управление. В противен случай физическата структура на управленията и датчиците трябва да бъде променена. При всички случаи, изключително полезно е да се пресметнат полюсите на техническата система, защото това показва дали тя е устойчива или не. Дори когато техническата система е устойчива, е важно да се пресметне дъмпинга на двойките комплексни полюси или да се види дали устойчиви полюси, които не влияят силно на динамиката.

**Стъпка 3.** Построяването на „просто стандартно“ управление е по избор, но в някои случаи може да бъде много полезно. Това може да бъде използвано, за да се види какво качество идеално може да бъде постигнато, независимо, че такова управление може да не работи в реалния случай поради голямата си чувствителност към някои смущения. Друго основание е да се види какъв прогрес може да бъде направен с новите методи.

**Стъпка 4.** Уточняването на някои свойства на качеството винаги е необходимо за синтеза на управление. Едно от големите предимства на  $H_{\infty}$  синтеза е, че може да бъде

базиран на тегла, които могат да бъдат отнесени директно към свойствата на качеството на системата със затворена верига като грешка при следенето, граници, усилия на управлението и т.н. От друга страна, има физически ограничения за системата, които могат да бъдат някои свойства на техническата система и на инструментариума. Известен опит и грешки е необходим, за да се намерят теглата, водещи до успешен синтез. В работата ще бъде засегнат и въпроса как работят теглата при синтеза на  $H_2$  оптимално управление. Ще бъде засегната и интерпретацията на  $H_\infty$  нормата като операторна норма, определянето на теглата, което може би е най-важната стъпка тук, както и схемите за теглата.

След като се определят теглата, се синтезира  $H_\infty$  управлението с помощта на софтуерни средства. В MATLAB това се прави чрез няколко процедури, които се състоят от няколко кода. Процедурата първо се извършва за разширената техническа система, която първо трябва да бъде изпълнена. Като резултат се получава представяне на  $H_\infty$  управлението в пространството на състоянията. Важно е да се излявят условията, при които  $H_\infty$  синтезът работи и да се търсят подходи в случаите, когато някое от тях бъде нарушено.

**Стъпки 5,6.**  $H_\infty$  управлението може да има добра робастна устойчивост, но не е задължително това да е случая. Следва да се определи структура с неопределеност, която може конфигурирана чрез неопределени параметри и тегла за неопределената динамика. Тогава разширената техническа система се състои от оригиналната физическа система и теглата за качество и неопределеност

**Стъпка 7.** След всичко направено до тук, синтезът на управление се извършва чрез D-K итерация, която се основава на  $H_\infty$  синтеза. Това завършва с описание на  $\mu$  управлението в пространството на състоянията. Синтезът е успешен, ако итерацията завършва с  $\mu$  близко до 1. Това означава, че теглата за качество и робастност са балансирани. Основните понятия, описващи едно  $\mu$  управление, са робастна устойчивост и робастно качество. И двете се измерват чрез сингулярната структурна стойност  $\mu$ . Обикновено  $\mu$  управлението е от висок ред. То може да бъде редуцирано с подходящи методи. Резултатите могат да бъдат сравнени с тези при стандартното ПИД управление.

## 2. ЛИНЕЙНИ ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ

В тази глава разглеждаме представяне на линейни системи с няколко входа и няколко изхода чрез обикновени диференциални уравнения. Линейна система се появява, когато нелинейна система се линеаризира в равновесно състояние. Всички методи, които се разглеждат в тази работа се отнасят до линейни системи и нелинейността на оригиналната физическа система трябва да се вземат предвид индиректно. Разглежда се процедура за линеаризиране, дава се решението за такива системи, прави се характеристика на устойчивостта и се пресмята честотната реакция. След като се получи представянето в пространството на състоянието на дадена предавателна функция, се изучават четири много важни свойства на линейните системи, именно, управляемост, наблюдаемост, стабилизируемост и откриваемост. Упоменават се някои характеристики на тези свойства и се дава декомпозицията на Калман на пространството на състоянията. Засяга се реализацията на преносни матрици и операции върху такива системи в пространството на състоянията. Определят се нулите на системи с много входове и много изходи. Разглеждат се уравненията на Ляпунов, които представляват линейни матрични уравнения и положителната определеност на техните решения се характеризира в термините на наблюдаемост. Тъй като моделирането на смущенията и на шума от датчиците за система с обратна връзка могат да се моделират като стохастически процес с определени известни свойства и това е ефективно при синтеза, внимание се отделя и на линейни системи със стохастични входове. Това важи с особена сила за синтеза на  $\mathbf{H}_\infty$  оптимално управление.

### 2.1. Линеаризация

Нека е дадена физическа система с  $m$  управляващи променливи  $u_1(t), \dots, u_m(t)$ ,  $r$  променливи на смущенията  $d_1(t), \dots, d_r(t)$  и  $l$  изходни променливи  $y_1(t), \dots, y_l(t)$ . Приемаме, че математическият модел на тази система се състои от  $n$  обикновени диференциални уравнения за някакви функции  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , които ще наричаме **състояния** на системата. Изходните променливи могат да се пресметнат от състоянията, а входните променливи - чрез  $l$  алгебрични уравнения. Използваме векторен запис

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_r(t) \end{pmatrix}$$

и техническата система се записва във вида

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t), \mathbf{u}(t)) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t), \mathbf{u}(t)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Независимата променлива  $t$  не се появява явно в  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ . Производната зависи неявно от вектора на състоянията и от входовете. Обикновено функциите  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  са нелинейни. За да продължим разглежданията, тази система трябва да бъде линеаризирана. Точка на равновесие е константно решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  на ур. (2.1), където управлението и смущението също са константи (т.е.  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_0$  и  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$ ). Тогава  $\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0$  удовлетворяват алгебричното уравнение

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

В този случай изходният сигнал е

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0). \quad (2.3)$$

Отклонение от точката на равновесие е както следва

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_0, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0.$$

Функциите  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  се заменят с техните линейни апроксимации в точката  $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0)$ . Отклоненията се предполагат малки. Предполагаме, че  $\mathbf{f}$  е диференцируема и отбелязваме нейния якобиан в точката  $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0)$  с  $\mathbf{J}_f(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0)$ . Тогава имаме

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{J}_f(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \begin{pmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_f(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \begin{pmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}} \\ \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Якобианът може да бъде записан във вида

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_{10} & \mathbf{B}_{20} \end{pmatrix},$$

където разделянето е дадено по променливите и

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{20} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{d}_0) \end{pmatrix},$$

и матриците  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}_{20}$  са дефинирани аналогично. Нека  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\Delta \mathbf{d}$ ,  $\Delta \mathbf{u}$  са подходящи приближения на истинските отклонения. Тогава имаме

$$\mathbf{E} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_0 \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_{10} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{B}_{20} \Delta \mathbf{u}.$$

При предположението, че матрицата  $E$  е неособена, горната система е еквивалентна на

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{d} + \mathbf{B}_2 \Delta \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A}_0, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{B}_{10}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{B}_{20}.$$

Ур. (2.4) е линейна система диференциални уравнения. Процедурата за линеаризиране на изходите е подобна, което дава

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}, \mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}, \mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \approx \mathbf{J}_g(\mathbf{x}_0, \mathbf{d}_0, \mathbf{u}_0) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Това може да се запише във вида (Определянето на матриците  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  е очевидно.)

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D}_1 \Delta \mathbf{d} + \mathbf{D}_2 \Delta \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Ур. (2.4) – (2.5) описват приблизително нелинейната система (2.1) около точката на равновесие. По нататък разглеждаме свойствата на линейни системи от вида (2.4) -- (2.5).

## 2.2. Общи свойства на линейни системи

### 2.2.1. Решение и предавателни матрици

За простота в ур. (2.4) – (2.5) пропускаме символа „ $\Delta$ ” и обща линейна система с постоянни коефициенти се записана във вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тук  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  е състоянието на системата,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  е входът (управление и смущение) и  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$  е изходът. Матриците  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  са с подходящи размерности. При дадено начално условие

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.7)$$

диференциалното уравнение в (2.6) има единствено решение от вида

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \left( e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \right). \quad (2.8)$$

Изходът се получава като използваме ур. (2.8) и второто от ур. (2.6)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t-\tau)) \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Тук  $\delta(t)$  представлява единичният импулс. Нека сега

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t) .$$

Ако разглеждаме нулеви начални условия ( $x_0 = 0$ ), входно/изходното (В/И) поведение на системата може да се представи със следния интеграл

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau . \quad (2.9)$$

Функцията  $\mathbf{g}(t)$  ще наричаме **импулсна реакция**.

В/И отношение може да бъде описано и чрез предавателна матрица. За тази цел към ур. (2.6) се прилага трансформация на Лаплас, което води до

$$s \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} .$$

и изходът може да се пресметне като

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}_0 + (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \hat{\mathbf{u}} .$$

Като се дефинира

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.10)$$

В/И съотношение придобива вида

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(s) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

$G(s)$  се нарича **предавателна функция** на линейната система (2.6). Удобно е  $G(s)$  да бъде представена във вида

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) .$$

и представлява трансформацията на Лаплас за импулсната реакция  $G(s) = \hat{g}(t)$ .

Обратната матрица в ур. (III.2.10) може да се представи във вида

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{M}(s)}{q(s)} , \quad q(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) .$$

където  $M(s)$  е  $n \times n$  матрица, чиито членове са полиноми с максимална степен  $n-1$ .

$$\mathbf{G}(s) = \frac{1}{q(s)} \mathbf{C} \mathbf{M}(s) \mathbf{B} + \mathbf{D} . \quad (2.12)$$

Всяка компонента на  $\mathbf{G}(s)$  е правилна рационална функция и знаменателят на всяка компонента е делител на  $q(s)$ .

### 2.2.2. Устойчивост

Нека  $x_1$  и  $x_2$  са решения на ур. (2.6) за различни начални условия

$$\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_{10}, \quad \mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_{10} + \mathbf{x}_0.$$

г.е.  $x_2$  е смутеното  $x_1$  с  $x_0$ . Въпросът ни е как това смущение влияе на решението за продължителен период от време. Разликата  $x(t) = x_2(t) - x_1(t)$  е решение на хомогенното уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.13)$$

Системата (2.6) е **устойчива**, когато за всяко  $x_0$  решението ѝ клони към нула при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Системата (2.6) е устойчива тогава и само тогава, когато всички собствени стойности на матрицата  $\mathbf{A}$  имат отрицателни реални части. В този случай матрицата  $\mathbf{A}$  се нарича устойчива.

Нека матрицата  $\mathbf{A}$  е устойчива и нека  $u(t) = u_0$  е константа. Тогава изходът  $y(t)$  на системата (2.6) клони към гранична стойност  $y_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

$$\mathbf{y}_\infty = \mathbf{G}(0)\mathbf{u}_0.$$

### 2.2.3. Честотна реакция

Търсим представяне на изхода, когато входният сигнал е хармонична вибрация

$$\mathbf{u} = e^{st} \mathbf{u}_0 \quad \text{with } s = i\omega.$$

Пресмятаме изхода за произволно комплексно число  $s$ . Функцията  $x = e^{st} w_0$  е решение на ур. (2.6), ако  $s$  не е собствена стойност на матрицата  $\mathbf{A}$  и ако  $w_0$  е избрано по следния начин

$$\mathbf{w}_0 = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0.$$

Решението за да изпълнява също началното условие (2.7), трябва да бъде добавено подходящо решение  $x_h$  на хомогенното уравнение. То се дава с формулата

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 - e^{\mathbf{A}t} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0$$

и за изхода получаваме

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}_h(t) + e^{st} (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{u}_0.$$

Ако началната стойност е избрана подходящо, то функцията  $x_h(t)$  се превръща в нула. Такъв е случаят за

$$\mathbf{x}_0 = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0.$$

Тогава получаваме

$$\mathbf{y}(t) = e^{st}(\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D})\mathbf{u}_0.$$

Ако  $u_0 \in \mathbb{C}^n$  е константа, то

(а) Приемаме, че  $s$  не е собствена стойност на  $\mathbf{A}$ . Тогава решението  $x(t)$  на уравнението

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}e^{st}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x}(0) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0$$

и съответния изходен сигнал се дава с израза

$$\mathbf{x}(t) = e^{st}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{y}(t) = e^{st}\mathbf{G}(s)\mathbf{u}_0.$$

(б) Нека  $\mathbf{A}$  е устойчива матрица. Тогава решението на уравнението

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}e^{i\omega t}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

и съответния изходен сигнал се дава с израза

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + e^{i\omega t}(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + e^{i\omega t}\mathbf{G}(i\omega)\mathbf{u}_0,$$

където  $x_h(t)$ ,  $y_h(t)$  клонят към нула, когато  $t \rightarrow \infty$ .

Функцията  $G(i\omega)$  се нарича **честотна реакция** на системата. Тя представлява предавателната матрица  $G(s)$  върху имагинерната ос, т.е. трансформацията на Фурие на импулсната реакция.

Отвeтната реакция на системата за реални хармонични вибрации се получава като преминем към имагинерната част. Нека

$$\mathbf{G}(s) = (G_{jk}(s)).$$

Тук  $G_{jk}(s)$  са рационални. Дефинираме

$$\tilde{\mathbf{G}}(i\omega) = (|G_{jk}(i\omega)| \sin(\omega t + \arg G_{jk}(i\omega))).$$

Така, входният сигнал  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$  води до изходен сигнал

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{G}}(i\omega)\mathbf{u}_0.$$

Във формулата, клонящата към нула част е пропусната. Всяка компонента на  $y(t)$  е суперпозиция на много хармонични вибрации.

## 2.3. Управляемост

### 2.3.1. Предавателни функции и канонична форма на управлението

Понякога е дадена предавателната функция в честотната област и се търси представяне в пространството на състоянията. Нека е дадена предавателна матрица  $G(s)$ . Търсим система от матрици  $(A, B, C, D)$  такава, че

$$G(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right).$$

Тогава  $(A, B, C, D)$  е реализация на  $G(s)$ .

Решението на тази задача не е единствено. Нека  $(A, B, C, D)$  е реализация на  $G(s)$  и нека  $T$  е неособена  $n \times n$  матрица. Въвеждаме нов вектор на състоянията  $z = Tx$ . Тогава са в сила уравненията

$$\dot{z} = \mathbf{TAT}^{-1}z + \mathbf{TBU}$$

$$y = \mathbf{CT}^{-1}z + \mathbf{DU}$$

които могат да се препишат във вида

$$\dot{z} = \mathbf{A}_1z + \mathbf{B}_1u$$

$$y = \mathbf{C}_1z + \mathbf{D}_1u$$

(2.14)

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{TAT}^{-1}, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{TU}, \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{CT}^{-1}, \quad \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}.$$

(2.15)

По дефиниция двете системи  $(A, B, C, D)$  и  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  са **еквивалентни**, ако съществува неособената матрица  $T$  и е в сила ур. (2.15).

Ако реализациите  $(A, B, C, D)$  и  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  са еквивалентни, то техните предавателни матрици съвпадат:

За SISO системи с предавателна функция

$$G(s) = \frac{c_n s^n + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.16)$$

една такава реализация в пространството на състоянията е

$$\dot{z} = \mathbf{A}_1z + \mathbf{b}_1u$$

$$y = \mathbf{C}_1z + d_1u,$$

където

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}_1^T = (c_0 - a_0 c_n \quad \dots \quad c_{n-1} - a_{n-1} c_n), \quad d_1 = c_n,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Следователно е в сила следното уравнение

$$G(s) = \mathbf{c}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{b}_1 + d_1.$$

Горната реализация има особено проста форма. Затова възниква въпросът: при какви условия съществува неособена матрица  $T$ , такава че еквивалентната система

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{z} + \mathbf{b}_1 u \quad (\mathbf{z} = T\mathbf{x})$$

Матриците  $A_1 = TAT^{-1}$ ,  $b_1 Tb$  имат формата (2.17).

Нека е дадена системата  $(A, b)$  и да предположим, че матрицата

$$\mathbf{C}_{Ab} = (\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}) \quad (2.18)$$

е неособена. Означаваме последния ред на обратната матрица  $C_{Ab}^{-1}$  с  $t_1^T$ . Тогава матрицата

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_1^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ t_1^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}$$

е неособена и, чрез въвеждане на ново състояние  $z = Tx$ , системата  $(A, b)$  ще бъде трансформирана в еквивалентна система  $(A_1, b_1)$  от вида (2.17). Числата  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  са коефициентите на характеристичния полином на  $\mathbf{A}$ .

Системата  $(A_1, b_1)$  се нарича **канонична форма за управление** на  $(A, b)$ . Система, чиято матрица  $C_{Ab}$  дефинирана с ур. (2.18) е неособена, се нарича управляема. Така една управляема система може да бъде трансформирана в канонична форма за управление.

### 2.3.2. Условия за управляемост

И така необходимо и достатъчно условие (НДУ) системата  $(A, b)$  да е управляема е тя да може да се трансформира в канонична форма за управление. Съществуват и други важни характеристика на управляемостта. Ако една система е неуправляема, някои нейни състояния не се повлияват от управлението. Това води до нулев ред в матрицата на управляемостта и може да се предположи, че управляемостта е свързана

с въпроса кои точки могат да бъдат достигнати чрез траекториите  $x(t)$  породени от системата. В този параграф ще отговорим на този въпрос за обща система  $(A, B)$ .

Нека  $R_{t_1}$  е множеството от всички вектори  $x_1 = x(t_1)$ , които се получават, когато  $u$  приема всички възможни управления, където  $x$  е решението на

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

(за произволен момент време  $t_1 > 0$ ). Търсим условие, което гарантира, че  $R_{t_1} = \mathbb{R}^n$ . Нека приложим решение (2.8) като експоненциалната функция и я представим с нейния безкраен ред. Тогава имаме

$$\mathbf{x}(t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \frac{\tau^k}{k!} \mathbf{u}(t-\tau) d\tau.$$

Нека  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  да бъдат коефициентите на характеристичния полином на  $A$ . Тогава

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I}.$$

Следователно всички  $A^k$  при  $k \geq n$  могат да се изразят като линейна комбинация на степените на матрицата  $A^{n-1}, \dots, A, I$ . От тук се вижда, че всички матрици  $A^k B$  при  $k \geq n$  са линейни комбинации на матриците  $A^{n-1}B, \dots, AB, B$ . И така,  $x_1 = x(t_1)$  може да се изпише като линейна комбинация на стълбовете на матрицата

$$\mathbf{C}_{AB} = (\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}). \quad (2.20)$$

Матрицата  $\mathbf{C}_{AB}$  е пряко обобщение на матрицата (5.38) на управляемостта за системи с едно управление.

Следователно, твърдението  $R_{t_1} = \mathbb{R}^n$  е възможно само ако  $\text{rank} \mathbf{C}_{AB} = n$ . Нека това свойства е дадено. За да покажем, че всяко  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  принадлежи също и на  $R_{t_1}$ , построяваме управление, което трансформира точката  $x_0 = 0$  в  $x_1$ :

$$\mathbf{X}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau. \quad (2.21)$$

Тази матрица се нарича **грамиан на управляемостта**. Управлението

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t_1-\tau)} \mathbf{X}_c(t_1)^{-1} \mathbf{x}_1$$

има желаното качество. За да покажем, че матрицата  $\mathbf{X}_c(t_1)$  е обратима, заместваем управлението в решението (2.8) и получаваме желания резултат:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) &= \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t_1-\tau)} \mathbf{X}_c(t_1)^{-1} \mathbf{x}_1 d\tau \\ &= \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t_1-\tau)} d\tau \mathbf{X}_c(t_1)^{-1} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1. \end{aligned}$$

И така, една система с много входове и много изходи  $(A, B)$  е управляема, ако матрицата на управляемостта  $C_{AB}$  определена с ур. (2.20) има ранг  $n$ .

Следните твърдения, които дават няколко характеристики на управляемостта, са еквивалентни

(а) Системата  $(A, B)$  е управляема.

(б) За всяко  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  съществува управление  $\mathbf{u}$  такова, че са в сила ур. (2.19) и  $x(t_1) = x_1$ .

(в) Грамианът на управляемостта (2.21) е положително определен за всяко  $t \geq 0$ .

Ако матрицата  $C_{AB}$  на управляемостта на системата  $(A, B)$  има  $\text{rank} C_{AB} = r < n$ , то съществува подобие  $\mathbf{T}$  (трансформация) такова, че са верни следните твърдения.

(а) Трансформираната двойка има вида

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}.$$

(б) Системата  $(\tilde{\mathbf{A}}_{11}, \tilde{\mathbf{B}}_1)$  е управляема.

Можем да направим следното заключение. Нека  $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$  и нека

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

да бъде трансформираното състояние. Тогава трансформираната система може да бъде преписана във вида

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad \tilde{\mathbf{C}}_2) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (2.23)$$

Съответната предавателна функция има вида

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}.$$

В ур. (2.23) частта от системата, която може да бъде повлияна от управлението е отделена от частта, която не може да бъде повлияна от управлението. Управляемата част може винаги да бъде стабилизирана с подходящо управление, докато оставащата част не може да бъде повлияна от никакво управление. Следователно, системата (2.23) може да бъде стабилизирана единствено, ако частта от системата, която не може да бъде повлияна от управлението, е устойчива.

Системата  $(A, B)$  се нарича **стабилизируема**, ако матрицата  $\tilde{A}_{22}$  в нормалната форма (2.22) е устойчива.

**Теорема ПБХ:** (Попов-Белевич-Хаутус) за управляемост и за стабилизируемост

(а) Системата  $(A, B)$  е управляема тогава и само тогава, когато

$$\text{rank}(A - \lambda I \quad B) = n \quad \text{за всяко } \lambda \in \mathbb{C}.$$

(б) Системата  $(A, B)$  е стабилизируема тогава и само тогава, когато

$$\text{rank}(A - \lambda I \quad B) = n \quad \text{за всяко } \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{Re } \lambda \geq 0.$$

## 2.4. Наблюдаемост

Разглеждаме предавателна функция във форма (5.26). Освен канонична форма за управление в пространството на състоянията съществува и друга реализация. Нека запишем  $G(s)$  във вида

$$G(s) = \mathbf{c}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{b}_1 + d_1 = \mathbf{b}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1^T)^{-1} \mathbf{c}_1 + d_1.$$

Въвеждайки матриците

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} c_0 - a_0 c_n \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \quad (2.24)$$

получаваме реализация в пространството на състоянията

$$G(s) = \mathbf{c}_2^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{b}_2 + d_1.$$

И в този случай ще потърсим условия, при които чрез подобие системата  $(\mathbf{c}^T, A)$  да бъде трансформирана във вида  $(\mathbf{c}_2^T, A_2)$ . Дефинираме

$$\mathbf{c}^T = (c_0 \quad \dots \quad c_{n-1}).$$

Това е възможно тогава и само тогава, когато матрицата

$$\mathbf{O}_{cA} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

е неособена. Системата  $(c_2^T, A_2)$  определена в ур. (2.24) се нарича **канонична система за наблюдение** на  $(c^T, A)$ . Нещо повече, система, за която матрицата, дефинирана в ур. (2.25), е неособена се нарича наблюдаема. Следователно, една система е наблюдаема тогава и само тогава, когато може да бъде трансформирана в канонична форма за наблюдение чрез подобие.

Матрицата

$$O_{CA} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

ще наричаме матрица на наблюдаемостта за системи с много входове и много изходи. Системата  $(C, A)$  се нарича наблюдаема ако матрицата на наблюдаемостта (5.48) има ранг  $n$ . Грамианът на наблюдаемостта се определя с изрази

$$X_o(t) = \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau. \quad (2.27)$$

Следните твърдения са еквивалентни

(а) Системата  $(C, A)$  е наблюдаема.

(б) За произволен момент време  $t_1 > 0$  началното състояние  $x_0$  се определя по единствен начин чрез изхода  $y(t)$  и управлението  $u(t)$  върху интервала  $[0, t_1]$ .

(в) Грамианът на наблюдаемостта (5.49) е положително определен за всяко  $t \geq 0$ .

Свойство (б), което е особено важно, казва, че е възможно от познаването на изхода да се познава цялото състояние на системата. Това се използва при построяването на наблюдатели. Твърдение (б) може да се изкаже още и така: ако  $y(t)$  е тъждествено нула върху интервал  $[0, t_1]$  (и ако  $u = 0$ ), то необходимо  $x_0 = 0$ .

И в този случай, ако матрицата на наблюдаемостта  $O_{CA}$  на системата  $(C, A)$  има  $rank(C, A) = r < n$ , то съществува подобие  $T$  такова, че са верни следните твърдения.

(а) Трансформираната двойка има вида

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad CT^{-1} = (\tilde{C}_1 \quad \mathbf{0}) \quad (2.28)$$

$$\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad \tilde{C}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times r}.$$

(б) Системата  $(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11})$  е наблюдаема.

Нека

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{x}$$

да бъде трансформираното състояние. Тогава трансформираната система може да се запише във вида

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} + \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (2.29)$$

и предавателната функция има представянето

$$\mathbf{G}(s) \doteq \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}.$$

В ур. (2.29) наблюдаемата и ненаблюдаемата част на системата са разделени. Състоянието на ненаблюдаемата част не може да бъде възстановено от изходните данни, докато състоянието на наблюдаемата част може да бъде разпознато. Следователно, оценка за пълното състояние на системата е възможно само ако ненаблюдаемата част клони към нула, когато  $t \rightarrow 0$  (ако  $u = 0$ ).

Системата  $(C, A)$  се нарича **откриваема**, ако матрицата  $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$  в ур. (2.28) е устойчива.

**Теорема** (Попов-Белевич-Хаугус (ПБХ) тест):

(а) Системата  $(C, A)$  е наблюдаема тогава и само тогава, когато

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n \quad \text{за всяко } \lambda \in \mathbb{C}.$$

(б) Системата  $(C, A)$  е откриваема тогава и само тогава, когато

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = n \quad \text{за всяко } \lambda \quad \text{Re } \lambda \geq 0.$$

Условието за ранга в (а) може да се формулира и по следния начин

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{за всяко } \lambda, \mathbf{x}.$$

Тук ще формулираме известния **декомпозиция на Калман** на пространството на състоянията. Нека е дадена линейна система във вида (2.6). За такава система съществува трансформация  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$  на координатите такава, че

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{12} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = (\tilde{C}_1 \ \mathbf{0} \ \tilde{C}_3 \ \mathbf{0}).$$

Подсистемите тук имат следните свойства:

(1) Системата  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  е управляема и системата  $(\tilde{C}_1, \tilde{A}_{11})$  е наблюдаема.

(2) Следната система е управляема:

$$\left( \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \right).$$

(3) Следната система е наблюдаема:

$$\left( \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{13} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix} \right).$$

Съответната предавателна функция има представянето

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \tilde{C}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1 + \mathbf{D}.$$

Ще отбележим, че ако една собствена стойност е и управляема и наблюдаема, тя е собствена стойност на матрицата  $\tilde{A}_{11}$ .

## 2.5. Представяне на предавателни матрици в пространството на състоянията

Нека са дадени две преносни функции на системи с един вход и един изход

$$G_1(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{c}_1^T & d_1 \end{array} \right), \quad G_2(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \hline \mathbf{c}_2^T & d_2 \end{array} \right)$$

Тогава

$$\begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{b}_1 + d_1 \\ \mathbf{c}_2^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_2)\mathbf{b}_2 + d_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \hline \mathbf{c}_1^T & \mathbf{0} & d_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_2^T & d_2 \end{array} \right)$$

$$(G_1(s) \quad G_2(s)) = \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \\ \hline \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T & d_1 & d_2 \end{array} \right).$$

За произволна предавателна матрица реализация в пространството на състоянията може да се постигне с две стъпки. В първата стъпка се построява реализация за всяка компонента (която може да има, например, канонична форма за управление). Във втората стъпка реализациите се композират според правилата по-горе. Тази процедура обикновено води до не-минимална реализация.

Една реализация  $(A, B, C, D)$  в пространството на състоянията се нарича **минимална реализация** на  $G(s)$ , ако  $A$  има най-малка възможна размерност. Следната теорема характеризира минималната реализация.

**Теорема:**

(а) Една реализация  $(A, B, C, D)$  в пространството на състоянията на предавателна матрица  $G(s)$  е минимална тогава и само тогава, когато  $(A, B)$  е управляема и когато  $(C, A)$  е наблюдаема.

(б) Две минимални реализации в пространството на състоянията на предавателната матрица  $G(s)$  са еквивалентни.

За да бъде конструирана директно минимална реализация, се използва метода на **Хилберт**. За да го опишем, тук ще направим някои ограничителни предположения.

Нека  $G(s)$  е  $l \times r$  предавателна матрица във вида

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{p(s)},$$

където  $p(s)$  е скаларен полином и компонентите на матрицата  $Z(s)$  са също полиноми. Нека означим нулите на  $p(s)$  с  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  и за простота предположим, че са различни и реални. Тогава

$$p(s) = (s - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_r)$$

и  $G(s)$  има следното частично дробно развитие с  $r \times r$  матрици  $W_k$  с  $rank W_k = \rho_k$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{s - \lambda_k} \mathbf{W}_k.$$

Нека  $B_k \in \mathbb{R}^{\rho_k \times m}$  и  $C_k \in \mathbb{R}^{l \times \rho_k}$  са матрици със свойството

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{B}_k.$$

Тогава реализацията на  $G(s)$  може да се запише във вида

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 \mathbf{I}_{\rho_1} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda_r \mathbf{I}_{\rho_r} & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_r & \mathbf{D} \end{array} \right).$$

С ПХБ тестовите се вижда, че тази реализация е управляема и наблюдаема и следователно е минимална.

Нека разгледаме операция, която се извършва от две системи

$$\mathbf{G}_1(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{array} \right), \quad \mathbf{G}_2(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{array} \right)$$

Когато двете системи са свързани **последователно**, това отговаря на умножаване на техните предавателни матрици

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_2 \\ \hline \mathbf{D}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \end{array} \right). \quad (2.30)$$

Когато двете системи работят **успоредно**, това отговаря на събирането на техните преносни матрици

$$\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \end{array} \right). \quad (2.31)$$

**Транспонираната** (дуална) система на система  $G(s)$  с реализация  $(A, B, C, D)$  в пространството на състоянията се дава с формулата:

$$\mathbf{G}^T(s) = \mathbf{B}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{D}^T.$$

и реализацията ѝ в пространството на състоянията е

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \hline \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{array} \right).$$

**Конюгованата** система на система  $G(s)$  с реализация  $(A, B, C, D)$  в пространството на състоянията се дава с формулата:

$$\mathbf{G}^-(s) = \mathbf{G}^T(-s) = \mathbf{B}^T (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{D}^T.$$

и реализацията ѝ в пространството на състоянията е

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{A}^T & -\mathbf{C}^T \\ \hline \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{array} \right).$$

Дефинирайки  $G^*(s) = G(s^*)$ , в частност имаме  $G^*(i\omega) = G^{\sim}(i\omega)$ .

Предполагаме, че матрицата  $\mathbf{D}$  в представянето е обратима. Съществува предавателна функция  $G^{-1}(s)$  такава, че

$$\mathbf{G}(s)\mathbf{G}^{-1}(s) = \mathbf{G}^{-1}(s)\mathbf{G}(s) = \mathbf{I}$$

Тя се нарича **обратна** на  $G(s)$  и се определя с израза:

$$\mathbf{G}^{-1}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \hline \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{D}^{-1} \end{array} \right).$$

Това може да се види като приложим формула (2.30) и изпълнявайки подобие

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

## 2.6. Уравнения на Ляпунов

При  $H_2$  и  $H_\infty$  оптималните задачи се използва **уравнение на Ляпунов**. Това е матрично уравнение от вида

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{2.32}$$

с  $n \times n$  матрици  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{Q}$ . Ако  $\mathbf{A}$  е устойчива матрица, то

$$\mathbf{X} = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt$$

е единствено решение на ур. (2.32).

Ясно е, че ако  $\mathbf{Q} \geq 0$ , то и  $\mathbf{A} \geq 0$  както и от  $\mathbf{Q} > 0$  дава  $\mathbf{A} > 0$ .

Освен това от уравнението на Ляпунов следва непосредствено, че е в сила следното подобие

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}.$$

Ако  $\mathbf{X}$  е решение на ур. (2.32) на Ляпунов, то

(а)  $\mathbf{A}$  е устойчива, ако  $\mathbf{A} > 0$  и  $\mathbf{Q} > 0$ .

(б)  $A$  е устойчива, ако  $A \geq 0$ ,  $Q \geq 0$  и  $(Q, A)$  е откриваема.

Ако  $A$  е устойчива и  $Q \geq 0$ , то двойката  $(Q, A)$  е наблюдаема тогава и само тогава, когато  $X > 0$ .

Матрицата  $A$  е устойчива тогава и само тогава, когато съществува  $X > 0$ , за което

$$A^T X + X A < 0.$$

## 2.7. Линейни динамични системи със стохастични входни сигнали

### 2.7.1. Гаусови случайни процеси

Тук разглеждаме ситуацията, когато състоянията  $x(t)$  на системата и входните данни (входни смущения и грешки при измерванията) са случайни вектори. В този случай изобразяването на времето  $t$  в случайния вектор  $x(t)$  е **стохастически процес**. В теорията на управлението често е полезно външните смущения грешките от измерванията (следователно и състоянието  $x(t)$ ) да се разглеждат като стохастически процеси. При синтеза на управлението, често могат да се постигнат предимства от техните свойства.

Накратко ще се спрем на основните свойства на случайни процеси, които са свързани с теория на управлението. **Математическото очакване** на случаен процес се получава като се образува математическото очакване на случайния вектор във всеки момент време:

$$m_x(t) = E(x(t)).$$

Математическото очакване на произведението  $x(t_1)x^T(t_2)$  е **корелационната** (автокорелационна) функция:

$$R_x(t_1, t_2) = E(x(t_1)x^T(t_2)).$$

Величината  $E(x^T(t)x(t))$  се нарича **средно квадратична стойност** на случайния процес. Тя може да се пресметне от корелационната функция

$$E(x^T(t)x(t)) = \text{trace}(R_x(t, t)).$$

Ако аргументите в корелационната функция са еднакви, се получава **корелационната матрица**:

$$\Sigma_x(t) = E(x(t)x^T(t)) = R_x(t, t).$$

**Ковариацията** на случайния процес се означава както следва:

$$C_x(t_1, t_2) = E((x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))^T).$$

За процеси с математическо очакване 0, корелацията и ковариацията съвпадат. В общия случай

$$\mathbf{C}_x(t_1, t_2) = \mathbf{R}_x(t_1, t_2) - \mathbf{m}_x(t_1) \mathbf{m}_x(t_2)^T.$$

Един стохастически процес е **стационарен в широк смисъл**, ако математическото му очакване не зависи от времето  $E(x(t)) = m_x$  ( $m_x = const$ ), и ако корелационната му функция зависи само от времевата разлика  $\tau = t_1 - t_2$ . Тогава може да се дефинира

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \mathbf{R}_x(t + \tau, t), \quad t \text{ произволно.}$$

В този случай ковариацията зависи също само от времевата разлика. За стационарни случайни процеси, **спектралната плътност** се дефинира като трансформацията на Фурие на корелационната функция

$$\mathbf{S}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

И описва приносът на честотите, които формират стохастичния процес.

Гаусовите случайни процеси играят главна роля в теория на управлението. Това са процеси при които за всички произволни моменти време  $t_1, t_2, \dots, t_m$  случайните вектори  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)$  имат общо гаусово разпределение на вероятностите. За единичен случаен вектор  $\mathbf{x}$ , плътността на вероятността се дава с формулата

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{((2\pi)^n \det \mathbf{\Xi}_x)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T \mathbf{\Xi}_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \right\}.$$

Гаусовият процес е напълно определен с математическото очакване и с ковариационната функция.

Процес  $w(t)$ , който има средно квадратична стойност равна на 0 и автокорелационна функция във вида

$$\mathbf{R}_x(t_1, t_2) = \mathbf{W}(t_1) \delta(t_1 - t_2)$$

се нарича **бял шум**. За такъв процес случайните вектори  $x(t_1)$ ,  $x(t_2)$  се корелират за всевъзможните различни моменти  $t_1, t_2$ . За стационарен бял шум автокорелацията има вида

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \mathbf{W} \delta(\tau).$$

и спектралната му плътност  $S_w(\omega) = W$  е константа. По такъв начин, стохастичният процес бял шум се състои от всички честоти, които влияят по еднакъв начин. Въпреки, че няма реален процес, който да има това свойство, има смисъл да се работи с тази идеализация. Например, за синтеза на ЛКГ управлението се предполага, че всички външни смущения и грешки от измервания са бели процеси. Възниква въпросът как може да се характеризира решението на уравнението за състоянието.

### 2.7.2. Решения на линейни диференциални уравнения с бял шум за входен сигнал

Разглеждаме линейната система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Тук  $w(t)$  означава бял шум с математическо очакване 0 и спектрална плътност  $W$ . Началното състояние се приема да бъде случаен вектор с математическо очакване 0 и корелационна матрица  $R_0$ . Освен това предполагаме, че белият шум и началната стойност не са корелирани:

$$E(\mathbf{x}_0 \mathbf{w}^T(t)) = \mathbf{0}.$$

Математическото очакване на решението  $x(t)$  се получава чрез образуването на очакваните стойности във формулата на решението:

$$\mathbf{m}_x(t) = E \left\{ e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right\} = e^{\mathbf{A}t} E(\mathbf{x}_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} E(\mathbf{w}(\tau)) d\tau = \mathbf{0}.$$

Следователно, математическото очакване на изхода  $\mathbf{y}$  също става нула  $m_y(t) = 0$ .

Корелационната функция на вектора на състоянието  $\mathbf{x}$  също може да се пресметне от формулата за решението.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(t_1, t_2) &= E(\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}^T(t_2)) \\ &= E \left\{ \left( e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{w}(\tau) d\tau \right) \left( e^{\mathbf{A}t_2} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_2-\sigma)} \mathbf{B} \mathbf{w}(\sigma) d\sigma \right)^T \right\} \\ &= e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{R}_0 e^{\mathbf{A}^T t_2} + \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{W} \delta(\tau - \sigma) \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t_2-\sigma)} d\sigma d\tau \end{aligned}$$

с  $R_0 = E(x_0 x_0^T)$ . Записвайки  $s = \min(t_1, t_2)$  желаната формула се получава:

$$\mathbf{R}_x(t_1, t_2) = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{R}_0 e^{\mathbf{A}^T t_2} + \int_0^s e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t_2-\tau)} d\tau. \quad (2.33)$$

Корелационната функция за изходната променлива е дава с формулата:

$$\mathbf{R}_y(t_1, t_2) = \mathbf{C} \mathbf{R}_x(t_1, t_2) \mathbf{C}^T. \quad (2.34)$$

Корелационната матрица на състоянието е

$$\Sigma_x(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{R}_0 e^{\mathbf{A}^T t} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (t-\tau)} d\tau.$$

или чрез полагане на разликата  $t - \tau$  получаваме

$$\Sigma_x(t) = e^{At} \mathbf{R}_0 e^{A^T t} + \int_0^t e^{A\tau} \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T e^{A^T \tau} d\tau . \quad (2.35)$$

Корелационната матрица за изхода се получава

$$\Sigma_y(t) = \mathbf{C} \Sigma_x(t) \mathbf{C}^T . \quad (2.36)$$

Корелационната матрица на състоянието  $\mathbf{x}$  удовлетворява следното матрично диференциално уравнение

$$\dot{\Sigma}_x(t) = \mathbf{A} \Sigma_x(t) + \Sigma_x(t) \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T . \quad (2.37)$$

За устойчиви системи е възможно да се премине към граничен преход в уравненията (2.35), (2.36) и (2.37). Така се стига до следния резултат. Ако  $\mathbf{A}$  е устойчива матрица, то съществуват границите

$$\Sigma_x^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_x(t), \quad \Sigma_y^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma_y(t)$$

и представянията

$$\Sigma_x^\infty = \int_0^\infty e^{At} \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T e^{A^T t} dt, \quad \Sigma_y^\infty = \int_0^\infty \mathbf{g}(t) \mathbf{W} \mathbf{g}^T(t) dt .$$

Стационарната корелационна матрица  $\Sigma_x^\infty$  удовлетворява уравнението на Ляпунов

$$\mathbf{A} \Sigma_x^\infty + \Sigma_x^\infty \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} .$$

Ползвайки ур. (2.33) може да се даде представяне на стационарната корелационна функция на вектора на състоянието и на изходния вектор.

(а) Стационарните корелационни функции имат представянето

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^\infty(\tau) &= \int_{\max(0, -\tau)}^\infty e^{A\sigma} \mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{B}^T e^{A^T(\tau+\sigma)} d\sigma \\ \mathbf{R}_y^\infty(\tau) &= \int_{-\infty}^\infty \mathbf{g}(\sigma) \mathbf{W} \mathbf{g}^T(\sigma + \tau) d\sigma . \end{aligned} \quad (2.38)$$

(б) Следното уравнение е в сила за спектралната плътност на изходната променлива

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{G}(-i\omega) \mathbf{W} \mathbf{G}^T(i\omega) . \quad (2.39)$$

В много ситуации моделирането на външните смущения или на грешките при измерването с бял шум е неточно. В тези случаи често е възможно тези величини да се моделират като стохастичен процес, който е резултат на обработване на белия шум с някаква линейна система, която се нарича **формиращ филтър**. Изходът след такава процедура се нарича **цветен шум**.

Формиращ филтър може да се получи от бял шум при допълнително предположение за единична спектрална плътност  $W = I$ . Филтър от първи ред представлява система от тип 0 и от първи ред без нули, т.е.

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}, \quad S_y(\omega) = \frac{k^2}{1+T^2\omega^2}$$

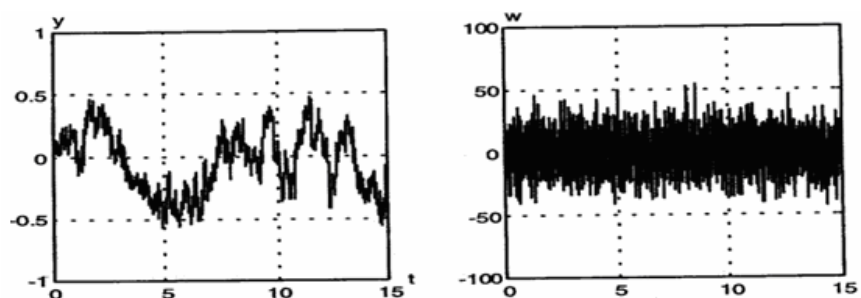
и като се приложи обратната трансформация на Фурие се получава

$$R_y(t) = \frac{k^2}{2T} e^{-\frac{|t|}{T}}.$$

Така стандартното стационарно отклонение на изхода е

$$\sigma_y = \sqrt{R_y(0)} = k / \sqrt{2T}.$$

Филтърът се определя от  $\sigma_y$  и от времевата константа  $T$  (Фиг.2.1  $\sigma_y = 0.3$  и  $T = 1$ ).



**Фигура 2.1.** Цветен шум от ред 1 (ляво) и бял шум (дясно)

### 3. Основни свойства на многомерни системи с обратна връзка

Линеаризираният модел на техническата система се състои от система линейни диференциални уравнения за нейните физически състояния. Входовете на техническата система са управлението  $\mathbf{u}$  и външните смущения  $\mathbf{d}$  и изходът е променливата  $\mathbf{y}$ , която се управлява, и която също е измерването. В класическата теория на управлението, диференциалните уравнения се използват, за да се пресметнат предавателните функции и влиза в сила само за изходната променлива. Състоянията не са представени и не влизат в обратната връзка. Затова е естествено да се търси друг вид управления, които се основават на обратна връзка по състояния. В тази глава ще разгледаме този подход за ММО системи. Започваме с обратна връзка просто по състоянията на системата без входни сигнали, което съответства на задачата за стабилизация. Когато трябва да бъде следен входен сигнал, концепцията за обратна връзка по състояния се обобщава.

Обратната връзка по състояния изисква всички състояния да могат да се замерват. Ако това е невъзможно, векторът на състоянията трябва да бъде оценен. Това може да се осъществи с наблюдател на Луенбергер. Комбинацията на обратна връзка и наблюдател води до управление базирано на наблюдател.

Концепцията за обратна връзка по състояния дава възможност да се влияе в много голяма степен върху динамиката на системата с обратна връзка. Ако техническата система е управляема, полюсите на затворената верига могат да бъдат предварително предписани. Може да бъде намерена формула за пресмятане на коефициентите на управлението чрез полюсите на затворената верига. Остава полюсите да бъдат поставени така, че системата с обратна връзка да има дадени желани свойства на качеството и робастната устойчивост. Критерият на Никуист заедно с някои модерни аргументи води до правила как трябва да се разположат полюсите.

Тук се представя общ подход за системи с много входове и много изходи. Техническата система  $P$  има два входа, векторът  $\mathbf{w}$ , състоящ се от външни смущения, и входен сигнал и управление  $\mathbf{u}$ . Изходите са променливи, които трябва да се управляват  $\mathbf{z}$  и измерванията  $\mathbf{y}$ , които са вход за управлението. Управлението за  $\mathbf{K}$  обикновено е динамична система (но може да бъде константа като частен случай) и е лесно да се види, че класическото ПИД управление заедно с неговите обобщения както и обратната връзка по състояния (с или без наблюдател) са частен случай на този подход. При по-нататъшните разглеждания, техническата система е по-обща и има възможност тя да съдържа тегла за качество и робастност. Правилната постановка и вътрешната устойчивост се дефинират адекватно и се характеризират за системи с много входове и много изходи.

### 3.1. Управление с обратна връзка по състоянията

Нека разгледаме техническа система с много входове и много изходи, чиято динамика се представя в пространството на състоянията по следния начин

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{d} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Входовете са външните смущения  $\mathbf{d}$  и управлението  $\mathbf{u}$ . Вътрешно, техническата система се описва с вектора на състоянията  $\mathbf{x}$ . Ние разглеждаме управления, които използват целият вектор на състоянията  $\mathbf{x}$ . Така измерването се описва с уравнението

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}.$$

Разглеждаме управление във вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (3.2)$$

с матрица  $F = (f_{ij})$  с подходяща размерност. В частния случай на единично управление, матрицата  $F$  е ред от вида

$$u = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n.$$

За МИМО система такова уравнение е в сила за всяко управление. Този вид управление се нарича управление с обратна връзка по състояния. Предполагаме, че всички състояния могат да бъдат измерени. Ако вземем предвид грешки при измерването (или шум)  $\mathbf{n}$ , уравнението за измерванията има вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_m = \mathbf{x} + \mathbf{n}.$$

Тук не се разглежда входен сигнал и не се разглежда изход (Фиг.3.1.). Управлението се използва само да подобри динамиката на техническата система. Търсим условия, при които една неустойчива техническа система може да бъде стабилизирана чрез закон по обратна връзка (3.2) и как в този случай трябва да се избере  $F$ . Когато няма външни смущения и шум, единственият вход към системата ще бъде началната стойност  $x(0) = x_0$ .

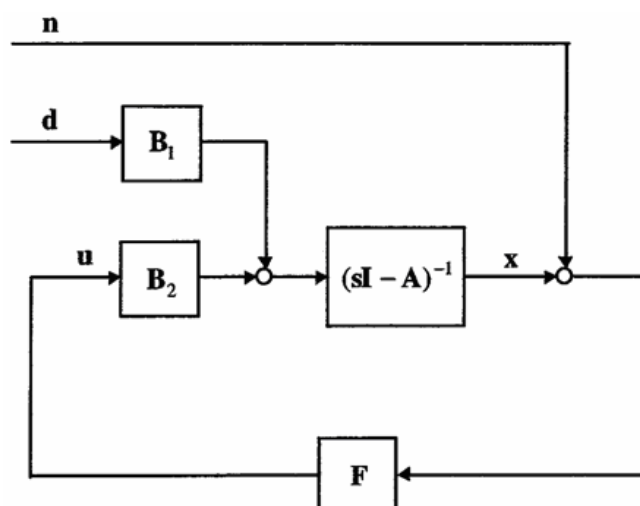
**Следене на входен сигнал.** Не вземаме предвид шума и предполагаем, че променливата, която трябва да се управлява се определя с уравнението на изхода

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{d} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Нека управлението има допълнителна задача  $\mathbf{z}$  да следи даден входен сигнал  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\mathbf{r}. \quad (3.4)$$

Матрицата  $F_1$  трябва да бъде избрана така, че поне за постоянни входове в стационарния случай изходът и входния сигнал да съвпадат. Предполагаме, че има толкова променливи на входния сигнал колкото са променливите на управлението. Тогава матрицата  $F_1$  е квадратна.



Фигура 3.1. Схема за обратна връзка

Затворената верига на системата в пространството на състоянията тук се дава с израза

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{r} + \mathbf{B}_1 \mathbf{d}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}_1 \mathbf{r} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{d}.$$

Ако няма външни смущения ( $d = 0$ ) и че входният сигнал е константа ( $r = r_0$ ). Матрицата  $F_1$  трябва да бъде избрана така, че

$$\mathbf{z}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{r}_0. \quad (3.5)$$

Ако допълнително затворената система е устойчива, то съществува вектор  $x_\infty$  такъв, че

$$\mathbf{x}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0},$$

и получаваме

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) \mathbf{x}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}.$$

Тъй като системата с обратна връзка се предполага устойчива, матрицата  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}$  е обратима и следователно

$$\mathbf{x}_\infty = -(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_0.$$

Следователно  $x_\infty$  съвпада с  $r_0$ , ако

$$(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) \mathbf{x}_\infty = -\mathbf{D}_{12} \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0.$$

Така трябва да имаме

$$-(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{12}) \mathbf{F}_1 \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0.$$

Уравнението се удовлетворява, когато  $F_1$  е избрана по следния начин

$$\mathbf{F}_1 = -(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{12})^{-1}, \quad (3.6)$$

И така, ако законът за обратна връзка е даден с ур. (3.4) с матрица  $\mathbf{F}$ , която стабилизира системата с обратна връзка, и ако  $\mathbf{F}_1$  е определена с ур. (3.6), то грешката  $r_0 - z_\infty$  на стационарното управление става нула за константен входен сигнал  $r_0$ .

Ако има постоянно външно смущение, то може да причини грешка в стационарното управление. Неточност в параметрите на техническата система също допринасят за грешка в управлението. Недостатъците на управление (3.4) във връзка с грешка в управлението могат да бъдат избегнати чрез въвеждане на *интегрална част* в закона за обратната връзка. За тази цел въвеждаме допълнителна изходна променлива  $h_p$

$$\mathbf{h}_p = \mathbf{r} - \mathbf{z}$$

и да използваме управление от вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{F}_1\mathbf{h}, \quad \mathbf{h}(t) = \int_0^t \mathbf{h}_p(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

с матрица  $\mathbf{F}_1$  с подходяща размерност. Тъй като  $\mathbf{h}$  е състояние на системата с обратна връзка, функцията  $h(t)$  става константа за  $t \rightarrow \infty$ , ако системата с обратна връзка е устойчива и ако входния сигнал и външните смущения са константи. Следователно  $h(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и е в сила ур. (3.5).

Изходът  $\mathbf{z}$  се явява като допълнително измерване с някакъв шум, който ще означим с  $n_1$ . При  $D_{11} = 0$ ,  $D_{12} = 0$  няма нужда от допълнителен датчик, тъй като  $\mathbf{z}$  може да бъде пресметнато от измерванията на  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}$  и шумът се дава с формулата  $n_1 = \mathbf{C}_1 n$ . Уравнението с допълнителното измерване е

$$\mathbf{h}_{pm} = \mathbf{r} - \mathbf{z} + \mathbf{n}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{C}_1\mathbf{x} - \mathbf{D}_{11}\mathbf{d} - \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} + \mathbf{n}_1, \quad (3.8)$$

и в ур. (3.7)  $\mathbf{x}$ ,  $h_p$  трябва да бъдат заменени с  $x_m$ ,  $h_{pm}$ , ако се взема предвид шумът. Интегралът в ур. (3.6) в този случай се означава с  $h_m$ .  $h_m$  може да бъде разгледано като състояние на техническата система, т.е. векторът на състоянието  $\mathbf{x}$  да бъде разширен с  $h_m$ . Тогава отново вземаме обратна връзка на целия вектор на състоянието с постоянни константи

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{n}) + \mathbf{F}_1\mathbf{h}_m. \quad (3.9)$$

Търсим обратната връзка в пространството на състоянията в този случай. За тази цел нека

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{h}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{1e} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}),$$

$$\mathbf{B}_{2e} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{D}_{12} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1e} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{D}_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Динамиката на разширената техническа система се дава с уравнението

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_{1e} \mathbf{d} + \mathbf{B}_s \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_s \mathbf{r} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_{1e} \mathbf{x}_e + \mathbf{D}_{11} \mathbf{d} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ур. (3.9) се преписва във вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_e \mathbf{x}_e + \mathbf{F} \mathbf{n} \quad \mathbf{F}_e = (\mathbf{F} \quad \mathbf{F}_1),$$

и системата със затворена верига приема вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_e &= (\mathbf{A}_e + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{F}_e) \mathbf{x}_e + \mathbf{B}_{1e} \mathbf{d} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{F} \mathbf{n} + \mathbf{B}_s \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_s \mathbf{r} \\ \mathbf{z} &= (\mathbf{C}_{1e} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}_e) \mathbf{x}_e + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \mathbf{n} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ако тя е устойчива и ако всички входове са константи, то  $\dot{\mathbf{x}}_e(t)$ , и в частност  $h_{pm}(t)$ , клонят към 0 при  $t \rightarrow \infty$  и грешката на стационарното управление се дава с

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}(t) - \mathbf{r}_0 = \mathbf{n}_{10}$$

ако системата с обратна връзка е устойчива и ако външното смущение  $d_0$ , входният сигнал  $t_0$  и грешката при измерване  $n_{10}$  са константи. В частност, тази грешка става нула за грешка  $n_{10} = 0$ .

Уравненията на разширената техническа система могат да се запишат в компактна форма, ако дефинираме

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = (\mathbf{B}_{1e} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{B}_s \quad \mathbf{B}_s), \quad \tilde{\mathbf{D}}_{11} = (\mathbf{D}_{11} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}), \quad \tilde{\mathbf{D}}_{21} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Входовете  $\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \mathbf{r}$  се комбинират в един вектор  $\mathbf{w}$ . Входовете на техническата система тогава са  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  и първото от ур. (3.10) се записва в следния вид

$$\dot{\mathbf{x}}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{u}.$$

Изходът на техническата система се състои от две величини

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_{1e} \mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{D}}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_e + \tilde{\mathbf{D}}_{21} \mathbf{w}.$$

По този начин структурата на системата с обратна връзка може да се разглежда като частен случай на обща система с обратна връзка.

## 3.2. Оценка на вектора на състоянията

### 3.2.1. Наблюдател на Луенбергер и управления с наблюдател

Обратната връзка по състояние изисква измерване на всички променливи на състоянието. Ако това не е възможно, възниква въпросът векторът на състоянията  $\mathbf{x}$  да бъде оценен от даден вектор от измервания  $\mathbf{y}$ . Нека разгледаме системата

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Без смущения и шум управлението има единствената задача да подобри динамиката на техническата система. Началната стойност  $x(0) = x_0$  се предполага неизвестна. Търсим оценка  $\tilde{\mathbf{x}}$  на вектора на състоянието  $\mathbf{x}$  по следния начин:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{L}(\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{y}) + \mathbf{B}\mathbf{u}.\tag{3.13}$$

Введено е допълнително произведение на  $n \times l$  матрица  $\mathbf{L}$  с грешката при изхода.  $\mathbf{L}$  следва да бъде определена така, че за всички начални стойности  $x_0$  и всички управления  $\mathbf{u}$  да е изпълнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}\tag{3.14}$$

Система (3.13) с такова свойство се нарича наблюдател на Луенбергер. Той може да се запише още във вида

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} + \mathbf{L}\mathbf{D})\mathbf{u} - \mathbf{L}\mathbf{y}.\tag{3.15}$$

Ако матрицата  $\mathbf{L}$  е избрана така, че матрицата  $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$  е устойчива, то системата (3.15) е наблюдател на Луенбергер. Матрица  $\mathbf{L}$  с това свойство съществува тогава и само тогава, когато системата  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  е откриваема.

Ако обратната връзка по състояние изисква наблюдател, управлението с обратна връзка по състояние използва оценката  $\tilde{\mathbf{x}}$  вместо истинското състояние  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}.\tag{3.16}$$

Ако  $\mathbf{u}$  се елиминира от уравнението (3.15) на наблюдателя, се получава уравнението

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{F})\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{y}.\tag{3.17}$$

Уравнения (3.16) и (3.17) са представяне на управлението в пространството на състоянията, което може да се запише в следната форма

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}(s)\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C} + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{F} & -\mathbf{L} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{array} \right).\tag{3.18}$$

Такова управление се нарича **управление с наблюдател**. За да оценим динамиката на система с обратна връзка при управление с наблюдател, използваме уравнения (3.16) и (3.12). Заместваме оценката  $\tilde{\mathbf{x}}$  с грешката на оценката  $\mathbf{e}$  и получаваме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{e}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{F}\mathbf{e}.$$

Представяне на система с обратна връзка в пространството на състоянията се дава с уравнението

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F} & -\mathbf{B}\mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Собствените стойности на затворената система с управление с наблюдател са точно собствените стойности на матриците  $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$  и  $\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}$ , т.е. собствените стойности на системата с обратна връзка по състоянията и собствените стойности на наблюдателя. Следователно, управлението по обратна връзка по състоянието и наблюдателя могат да бъдат синтезирани независимо.

Разгледаната система с обратна връзка няма външни входове и управлението единствено подобрява динамиката ѝ. Ако има входен сигнал или смущения, се използва същото управление с наблюдател и матрицата за затворената система остава същата.

### 3.2.2. Редуциран наблюдател

В този параграф разглеждаме построяването на наблюдател, чийто ред е по-малък от реда на системата  $l < n$ . За простота приемаме, че  $D = 0$  и че  $\text{rank} C = l$ . Идеята е следната. Съотношението  $y = Cx$  за изхода е линейна система от  $l$  уравнения за  $n$ -те компоненти на вектора на състоянието  $x$ . Тази система може да се представи с еквивалентна система с  $l$  базисни независими - компоненти на  $x$ , и  $n-l$  независими променливи. Тогава е достатъчно да се построи наблюдател за  $n-l$  от компонентите на  $x$  вектора на състоянието.

Тъй като  $\text{rank} C = l$ , то съществуват  $l$  линейно независими стълба на  $C$ , и нека това бъдат първите му  $l$  стълба след прилагане на преобразованието  $P = (p_{ij})$  ( $PP^T = I, P^{-1} = P^T$ ) към  $C$ .

$$P_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ако } j_i = k, \\ 0, & \text{ако } j_i \neq k. \end{cases}$$

Тогава

$$\mathbf{C}\mathbf{P} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2), \quad \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$$

където  $\mathbf{C}_1$  е обратима  $l \times l$  матрица. Нека означим

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^T \mathbf{B}$$

Така получаваме следната система

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_2.$$

или като се изрази векторът  $x_1$  от второто уравнение чрез вектора  $x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ако въведем означенията

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}, \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{B}}. \quad (3.20)$$

получаваме

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_{11}y + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{21}y + A_{22}x_2 + B_2u. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Така, първоначалната система беше преобразувана в еквивалентна система, чийто изход  $y$  е част от нейния вектор на състоянието. Остава да конструираме наблюдател за вектора  $x_2$  в ур (3.21). Векторът

$$\bar{y} = \dot{y} - A_{11}y - B_1u$$

удовлетворява уравнението

$$\bar{y} = A_{12}x_2.$$

което може да се разглежда като уравнение на изхода за вектора  $x_2$ . Тогава уравнението за състоянието на наблюдателя придобива вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= A_{22}\bar{x}_2 + A_{21}y + B_2u + L(A_{12}\bar{x}_2 - \bar{y}) \\ &= (A_{22} + LA_{12})\bar{x}_2 + A_{21}y + B_2u + L(A_{11}y + B_1u - \dot{y}). \end{aligned}$$

Производната  $\dot{y}$  може да се оцени със следната смяна на променливите

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_2 + Ly.$$

Уравнението за наблюдателя може да се препише във вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= (A_{22} + LA_{12})(\bar{x}_2 - Ly) + A_{21}y + B_2u + L(A_{11}y + B_1u) \\ &= (A_{22} + LA_{12})\bar{x}_2 + (-(A_{22} + LA_{12})L + A_{21} + LA_{11})y + (B_2 + LB_1)u. \end{aligned}$$

или като въведем означенията

$$\begin{aligned} L_r &= -(A_{22} + LA_{12})L + A_{21} + LA_{11} \\ B_r &= B_2 + LB_1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

във вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= (A_{22} + LA_{12})\bar{x}_2 + L_r y + B_r u \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_2 - Ly. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Това се нарича **редуциран наблюдател**.

Ако системата  $(C, A)$  е откриваема, то съществува матрица  $L$ , за която  $A_{22} + LA_{12}$  е устойчива. Ако  $\tilde{x}_2$  се определя с ур. (3.21) – (3.23) и поставим

$$\tilde{x}_1 = C_1^{-1}(y - C_2\tilde{x}_2).$$

то грешките на оценката  $e_1 = x_1 - \tilde{x}_1$  и  $e_2 = x_2 - \tilde{x}_2$  удовлетворяват

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad \text{за } i = 1, 2.$$

Управлението може да се запише във вида

$$u = Fx = FP \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = (F_1 \quad F_2) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

Най-лесно е в обратната връзка да се използва променливата  $\tilde{x}_2$  вместо  $y$ . Дефинирайки

$$\tilde{F}_1 = F_1 C_1^{-1}, \quad \tilde{F}_2 = F_2 - F_1 C_1^{-1} C_2,$$

можем да запишем

$$u = \tilde{F}_1 y + \tilde{F}_2 \tilde{x}_2. \tag{3.24}$$

Тогава представянето на затворената система в пространството на състоянията се дава с израза

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 \tilde{F}_1 & A_{12} + B_1 \tilde{F}_2 & -B_1 \tilde{F}_2 \\ A_{21} + B_2 \tilde{F}_1 & A_{22} + B_2 \tilde{F}_2 & -B_2 \tilde{F}_2 \\ 0 & 0 & A_{22} + LA_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \tilde{x}_2 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

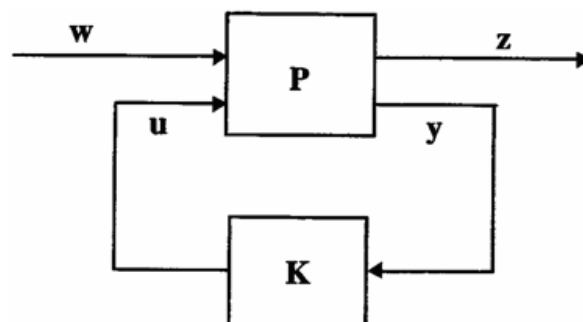
откъдето се вижда, че принципът за разделяне важи също и за редуцирания наблюдател.

### 3.3. Общи системи с обратна връзка

#### 3.3.1. Структура

В този параграф разглеждаме много общо представяне на веригите с обратна връзка, което практически обхваща всички случаи (Фиг.3.2). Техническата система  $P$  има външно смущение  $w$  и управление  $u$  за входове и величините  $z$  и  $y$  за изходи.  $y$  е измерването и обикновено е входът към управлението  $K$ , което има за изход  $u$ . Векторът на смущенията съдържа всички възможни входове и, в частност, възможен входен сигнал. Изходът  $z$  е също изход на веригата за обратната връзка и е съставен от променливите, които следва да бъдат повлияни от управлението. Някои от тях типично са грешки, които трябва да бъдат малки. Техническата система  $P$  съдържа не само физическата система (т.е.  $G$ ), но и някои тегла. Като резултат, не всички входове

или изходи на обратната връзка имат физическа природа. Управлението също е динамична система. Тази управляема система наричаме **обща система с обратна връзка**.



**Фигура 3.2.** Обща схема за обратна връзка

Винаги ще предполагаме, че техническата система е рационална и правилна. Тогава тя има представяне в пространството на състоянията в следния вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

или по-компактно

$$\mathbf{P}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{pmatrix},$$

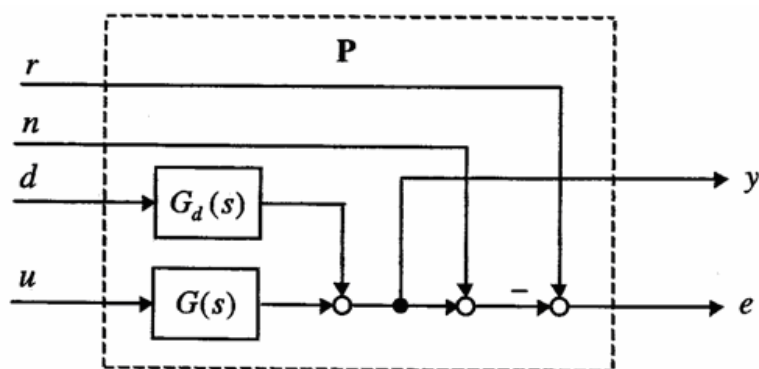
По подобен начин управлението е може да се представи във вида:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_K &= \mathbf{A}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{B}_K \mathbf{y}, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_K \mathbf{x}_K + \mathbf{D}_K \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

и по този начин се разглеждат само правилни управления.

Фиг.3.3 показва как система с един вход и един изход и с обратна връзка се представя в обща форма. Следното уравнение следва от блок диаграмата:

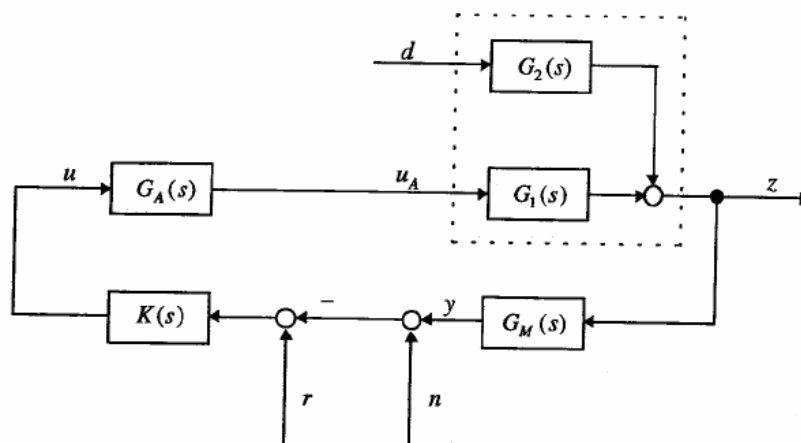
$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & G_d(s) & G(s) \\ \hline 1 & -1 & -G_d(s) & -G(s) \end{array} \right) \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{d} \\ \hat{u} \end{pmatrix}.$$



**Фигура 3.3.** Система с един вход и един изход и с обратна връзка в обща форма

### 3.3.2. Основни предавателни функции

Предполагаме, че техническата система има два входа: управление  $u_A$  и смущение  $d$ , които влияят на изхода  $z$ , който е променливата, която трябва да се управлява. Тогава техническата система се описва с две предавателни функции, именно  $G_1(s)$  за управляващия сигнал и  $G_2(s)$  за смущението. Сигналят  $u_A$  се генерира от управляващото устройство с предавателна функция  $G_A(s)$ . Входът за управляващото устройство е управлението  $u$ . Изходът на техническата система се измерва от датчик с предавателна функция  $G_M(s)$  и изход  $y$ , който е повреден с адитивна грешка от измерване  $n$ . Изходът на техническата система ще бъде  $y+n$ . Входният сигнал е  $r$ . Управляващото устройство има предавателна функция  $K(s)$  (Фиг.3.4).



**Фигура 3.4.** Физическа структура на затворена система

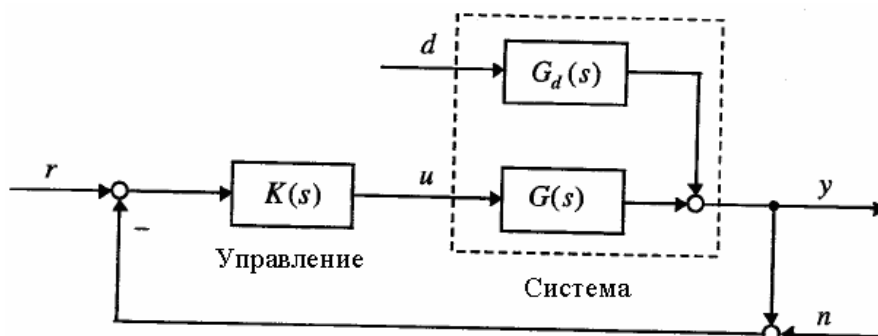
Дефинирайки предавателните функции

$$G(s) = G_M(s)G_1(s)G_A(s)$$

$$G_d(s) = G_M(s)G_2(s),$$

Нека  $G(s)$  и  $G_d(s)$  са предавателните функции на техническата система, разширена с динамиката на управляващото устройство и на датчика. Тази система също се нарича техническа система (Фиг.3.5). Тя има за входове команден сигнал  $r$ , смущение  $d$  и

шум при измерването  $n$ . Изходът  $y$  е изходът на оригиналната техническа система, който е преминал през динамиката на датчика.. Измерванията  $y$  и управляваната променлива  $z$  се отличават заради динамиката на датчика.



Фигура 3.4. Стандартна конфигурация за обратна връзка

Управлението и техническата система са свързани последователно и водят до **предавателна функция на веригата**

$$L(s) = K(s)G(s).$$

$$\hat{y} = G_d(s)\hat{d} + L(s)(\hat{r} - \hat{y} - \hat{n}) \quad \text{или} \quad \hat{y} = F_r(s)\hat{r} + F_d(s)\hat{d} - F_r(s)\hat{n}, \quad (3.27)$$

където

$$F_r(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (3.28)$$

е функцията на **допълнителна чувствителност**, и

$$F_d(s) = \frac{G_d(s)}{1 + L(s)}. \quad (3.29)$$

Ако смущението въздейства директно на изхода, т.е.  $G_d(s) = 1$ , то

$$\hat{y} = S(s)\hat{d},$$

където

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

наричаме функция на **чувствителност**. Използвайки тази функция можем да напишем

$$F_d(s) = S(s)G_d(s). \quad (3.30)$$

От ур. (3.28) и от дефиницията за чувствителност имаме

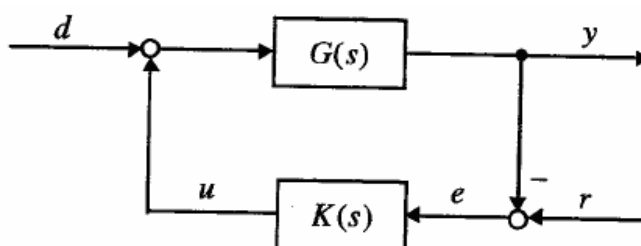
$$F_r(s) + S(s) = 1. \quad (3.31)$$

Сега пресмятаме. При  $n = 0$  за предавателните функции от входовете  $r$  и  $d$  към  $u$  от ур. (3.27), (3.30) и (3.31) имаме

$$\hat{u} = K(s)S(s)\hat{r} - K(s)G_d(s)S(s)\hat{d}. \quad (3.32)$$

Ако смущението е добавено директно към управлението, и ако няма шум, стандартната конфигурация с обратна връзка се редуцира до блок диаграмата на Фиг. 10. Тук е въведена грешка на управлението  $e = y - r$ . Прилагайки ур. (3.1) и (3.6) получаваме

$$\begin{aligned} \hat{e} &= S(s)\hat{r} - S(s)G(s)\hat{d} \\ \hat{u} &= K(s)S(s)\hat{r} - F_r(s)\hat{d}. \end{aligned} \quad (3.33)$$



**Фигура 3.5.** Опростена конфигурация за стандартна обратна връзка

Така за опростената конфигурация пълното входно/изходно поведение се описва с четири преносни функции  $S, SG, KS, F_r$ .

Предавателната функция  $G(s)$  на техническата система е правилна, защото е математически модел на реална физическа система. Тъй като за управлението се изисква да бъде реализуемо, то се предполага, че  $K(s)$  също е правилна. Тогава конфигурацията за обратна връзка (Фиг.3.5) е **коректно поставена**, ако предавателните функции  $S, SG, KS, F_r$  са правилни, т.е. тогава и само тогава, когато  $L(\infty) \neq -1$ , в частност, ако техническата система е строго правилна. Затова приемаме, че това условие е винаги изпълнено.

### 3.3.3. Обратна връзка по състояния с интегрално управление

Тези въпроси са пряко свързани с общата схема. Първо получаваме представянето на предавателната функция  $F_{zw}(s)$  на затворената система в пространството на състоянията. Ур. (3.25) и (3.26) дават

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_K \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{w} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D}_K \\ -\mathbf{D}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Предполагаме, че  $R = D_{22}D_K$  е обратима. Тогава

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D}_K \\ -\mathbf{D}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{22} & \mathbf{R}^{-1} \end{pmatrix}.$$

изключваме  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{y}$  в ур. (3.34) и  $\mathbf{u}$  от второто уравнение на (3.25). Така получаваме

$$\mathbf{F}_{zw}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right),$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \\ \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{22} \mathbf{C}_K), \quad \mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \\ \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{21}$$

$$\mathbf{C}_c = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_K) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{22} \mathbf{C}_K), \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{21}. \quad (3.35)$$

Системата е обратна връзка е коректно поставена, ако всеки вход  $\mathbf{w}$  се изобразява по единствен начин върху изход  $\mathbf{z}$ , т.е. тогава и само тогава, когато матрицата  $R = D_{22} D_K$  е неособена (Фиг.3.5).

Входно/изходното поведение на SISO затворена система се описва с уравнението

$$\hat{\mathbf{y}} = F_r \hat{\mathbf{r}} + SG \hat{\mathbf{d}}.$$

и е устойчива тогава и само тогава, когато преносните функции  $F_r$  и  $SG$  са устойчиви. В действителност, в този труд изискваме повече, именно предавателните функции от външните величини  $r, d$  към вътрешните величини  $e, u$  също да бъдат устойчиви.

Една SISO система с обратна връзка се нарича **вътрешно устойчива**, ако четирите преносни функции  $S, SG, KS, F_r$  са устойчиви. Аналогично, обща система с много входове и много изходи и с обратна връзка с представяне (3.25) и (3.26) в пространството на състоянията е **вътрешно устойчива**, ако матрицата  $\mathbf{A}$  на системата със затворена верига е устойчива. Ако системата с обратна връзка е вътрешно устойчива, предавателната функция на затворената верига  $F_{zw}(s)$  е устойчива. Обратното изобщо не е вярно заради възможни съкратени нули.

Една система  $\mathbf{P}$  е **стабилизируема**, ако съществува правилно управление  $\mathbf{K}$  такова, че системата с обратна връзка е коректно поставена и вътрешно устойчива. Такова управление се нарича **допустимо**.

(а) Допустимо управление  $\mathbf{K}$  съществува тогава и само тогава, когато  $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема.

(б) Ако  $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема, и ако  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{L}$  са такива, че  $A + B_2 \mathbf{F}$  и  $A + \mathbf{L} C_2$  са устойчиви, то допустимото управление се дава с формулата

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{L} C_2 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{22} \mathbf{F} & -\mathbf{L} \\ \hline \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad (3.35)$$

Ако реализациите за  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{K}$  са стабилизируеми и откриваеми и ако

$(A1)$  матрицата

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right)$$

има пълен ранг по стълбове за всяко  $\lambda$  с  $\text{Re } \lambda \geq 0$ , и ако

(A2) матрицата

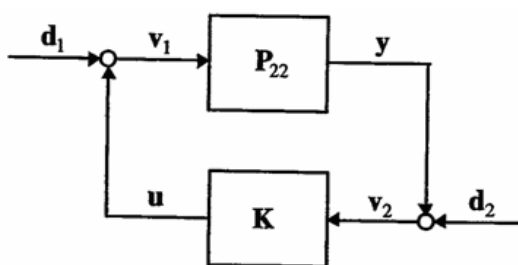
$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{array} \right)$$

има пълен ранг по редове за всяко  $\lambda$  с  $\text{Re } \lambda \geq 0$ , то

**K** е **вътрешно стабилизиращо** управление за **P** тогава и само тогава, когато  $F_{zw} \in \mathcal{RH}_\infty$ .

### 3.3.4. Вътрешна устойчивост

Вътрешната устойчивост е най-важното изискване за затворената система и ние предполагаме, че то винаги е изпълнено. Затова търсим *критерий* за вътрешна устойчивост.



Фигура 3.6. Диаграма за вътрешна устойчивост

Първо ще забележим, че вътрешната устойчивост може да бъде напълно охарактеризирана със частта  $P_{22}$  (ур. (3.25)) на техническата система и на управлението **K**. Двете смущения  $d_1$  и  $d_2$  (Фиг.3.6) действат като входове, а величините  $v_1$  и  $v_2$  са изходите. Не е от значение дали смущенията действително съществуват във физическата система. От диаграмата следва, че

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Последните две уравнения дават

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D}_K \\ -\mathbf{D}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_K \end{pmatrix}.$$

Въвеждаме предавателна функция  $F(s)$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

където при  $R = D_{22}D_K$  обратима имаме

$$\mathbf{D}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D}_K \\ -\mathbf{D}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} + \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{22} & \mathbf{D}_K \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{R}^{-1} \mathbf{D}_{22} & \mathbf{R}^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \mathbf{D}_c \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \\ \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{22} \mathbf{C}_K) \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_K \end{pmatrix} \mathbf{D}_c, \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{D}_c \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

От това представяне следва непосредствено, че системата с обратна връзка на Фиг.3.2 е коректно поставена и вътрешно устойчива тогава и само тогава, когато системата с обратна връзка на Фиг.3.6 има тези свойства. Това обстоятелство ще бъде често използвано при анализ на робастната устойчивост на разглежданите структури.

Предавателната функция  $F(s)$  може да се изрази чрез предавателните функции  $\mathbf{P}_{22}$  и  $\mathbf{K}$ . От Фиг.3.6 се вижда, че

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_1 &= \hat{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{K} \hat{\mathbf{v}}_2 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 &= \hat{\mathbf{d}}_2 + \mathbf{P}_{22} \hat{\mathbf{v}}_1. \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{P}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}.$$

При условие, че преносните функции  $\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K}$  и  $\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{22}$  са обратими, обратната на матрицата в лявата част на уравнението се дава с израза

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{P}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{22})^{-1} & \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K})^{-1} \\ \mathbf{P}_{22} (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{22})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Лесно се вижда, че

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{22} (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{22})^{-1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{22} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{P}_{22})^{-1} &= \mathbf{I} + \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{22}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

И обратимостта на (3.40) е осигурена, когато матрицата  $I - P_{22}K$  е обратима. А това е възможно тогава и само тогава, когато е обратима матрицата

$$\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22\infty} \mathbf{K}_{\infty} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{22} \mathbf{D}_K$$

Въвеждаме  $L_o$  предавателна матрица на веригата при изхода и  $L_i$  предавателна матрица на веригата при входа:

$$\mathbf{L}_o = -\mathbf{P}_{22} \mathbf{K}, \quad \mathbf{L}_i = -\mathbf{K} \mathbf{P}_{22}$$

както и  $S_o$  матрица на чувствителността на изхода и  $S_i$  матрица на чувствителността на входа

$$\mathbf{S}_o = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_o)^{-1}, \quad \mathbf{S}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_i)^{-1}$$

Така можем да запишем

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{P}_{22} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_i & \mathbf{K} \mathbf{S}_o \\ \mathbf{P}_{22} \mathbf{S}_i & \mathbf{S}_o \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_1 + \mathbf{K} \mathbf{S}_o \mathbf{d}_2$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_{22} \mathbf{S}_i \mathbf{d}_1 + \mathbf{S}_o \mathbf{d}_2.$$

И така, вътрешната устойчивост и устойчивостта на предавателната функция на затворената верига са еквивалентни за системите с обратна връзка представени на Фиг.3.6. По точно:

(а) Ако  $R = I - D_{22}D_k$  е неособена, то предавателната матрица  $F(s)$  определена с ур. (3.36) съществува и има представяне в пространството на състоянията (3.37) – (3.39) и може да се запише във вида (3.42).

(б) Ако двойките  $(A, B_2)$  и  $(A_K, B_K)$  са стабилизируеми и двойките  $(C_2, A)$  и  $(C_K, A_K)$  са откриваеми, то системата с обратна връзка на Фиг.3.6. е вътрешно устойчива тогава и само тогава, когато предавателната матрица (III.3.42) или преносните матрици  $S_i, S_o, K S_o, P_{22} S_i$  са устойчиви.

Следователно, общата система с обратна връзка е коректно поставена и вътрешно устойчива тогава и само тогава, когато

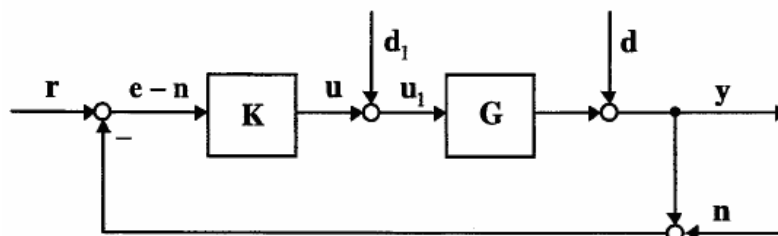
(1)  $L_s$  има точно  $n_k + n_p$  полюса в затворената RHP (дясна полуравнина)

(2)  $S_0(s) = [I - P_{22}(s)K(s)]^{-1}$  съществува и е устойчива.

$S_o$  е устойчива тогава и само тогава, когато всички нули на  $I + L_o$  са в отворената лява полуравнина.

### 3.3.5. Спецификации за системи с обратна връзка

В този параграф разглеждаме някои общи характеристики на системите с обратна връзка. Някои от тях си противоречат, затова синтезът на управление се състои от намиране на резонен компромис. Разглеждаме система с обратна връзка (Фиг.3.7).



Фигура 3.7. Стандартна конфигурация на МІМО система с обратна връзка

Тя има четири входа (входен сигнал  $r$ , две смущения  $d, d_1$  и шум  $n$ ). Въвеждаме входна и изходна функции на допълнителна чувствителност

$$T_i = I - S_i = L_i (I + L_i)^{-1}, \quad T_o = I - S_o = L_o (I + L_o)^{-1}. \quad (3.43)$$

Изходът  $y$  и грешката при следене  $e = r - y$  се пресмятат по формулите

$$\begin{aligned} \hat{y} &= T_o \hat{r} + S_o G \hat{d}_1 + S_o \hat{d} - T_o \hat{n}, \\ \hat{e} &= S_o \hat{r} + T_o \hat{n} - S_o G \hat{d}_1 - S_o \hat{d}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Изходът на управляващото устройство  $u$  и смутеното управление се дават с формулите

$$\begin{aligned} \hat{u} &= K S_o \hat{r} - K S_o \hat{d} - T_i \hat{d}_1 - K S_o \hat{n}, \\ \hat{u}_1 &= K S_o \hat{r} - K S_o \hat{d} + S_i \hat{d}_1 - K S_o \hat{n}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Аналогичните уравнения на ур. (3.41) имат вида

$$S_o G = G S_i, \quad S_i K = K S_o.$$

Следните изисквания **И1 – И4** се отнасят до **качеството**.

Малка грешка в управлението  $e$  ур. (3.44) налага следното изискване:

**И1:** За да бъде малка грешката при управлението по отношение на входния сигнал  $r$  и на смущенията  $d, d_1$ , максималните сингулярни стойности  $\bar{\sigma}(S_o)$  и  $\bar{\sigma}(S_o G)$  трябва да бъдат малки.

Изискването за малко  $S_o$  е еквивалентно на предавателната функция на затворената верига със следните неравенства:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S_o) \ll 1 &\Leftrightarrow \underline{\sigma}(L_o) \gg 1, \\ \bar{\sigma}(S_i) \ll 1 &\Leftrightarrow \underline{\sigma}(L_i) \gg 1. \end{aligned}$$

Ур. (III.3.45) дава второто изискване

**И2:** За да има *добро отхвърляне на смущенията*  $\mathbf{d}, \mathbf{d}_1$  по отношение на входа  $\mathbf{u}_1$  на техническата система и за да има малко влияние на входния сигнал и шума върху  $\mathbf{u}_1$ , максималните сингулярни стойности  $\bar{\sigma}(\mathbf{S}_1)$  и  $\bar{\sigma}(\mathbf{KS}_0)$  трябва да бъдат малки.

Следващото изискване също следва от ур. (3.44).

**И3:** За да има *добро подтискане на шума* от датчика по отношение на грешката на управлението,  $\bar{\sigma}(\mathbf{T}_0)$  трябва да бъде малка.

От дефиницията на  $\mathbf{T}_0$  е очевидно, че **И3** противоречи на **И1** и **И2**. Но тези изисквания са формулирани в честотната област. **И1** и **И2** се отнасят главно за ниски честоти, докато **И3** е важно само за високи честоти. Може да се отбележи, че  $\bar{\sigma}(\mathbf{T}_0)$  е малка, когато  $\underline{\sigma}(\mathbf{L}_0)$  е малка.

Остава да се анализира синтезът на управление по отношение на усилието на управлението  $\mathbf{u}$ . Ако при някакви честоти константата на управлението е голяма, а константата на веригата е малка:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{K}) \gg 1 \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}(\mathbf{L}_1(i\omega)) \ll 1.$$

тогава

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{K} \approx \mathbf{K}, \quad \mathbf{T}_1 \approx \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{S}_1 \mathbf{K}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{d}}) - \mathbf{T}_1 \hat{\mathbf{d}}_1 \approx \mathbf{K}(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{d}}).$$

И от тук се вижда, че входният сигнал  $\mathbf{r}$ , смущението  $\mathbf{d}$  и шумът от датчика  $\mathbf{n}$  ще се връщат към управлението чрез усилване. Затова е необходимо следното изискване, за да се избегне пренастищане на управляващите устройства:

**И4:** Управлението следва да бъде синтезирано така, че да няма честоти, при които константата на обратната връзка да е малка и константата на управлението да е много голяма.

Друг важен аспект **робастността**. Да разгледаме реална техническа система

$$\mathbf{G}_\Delta = (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{G},$$

където  $\Delta = \Delta(s)$  е устойчива предавателна функция. Предполагаме, че номиналната система с обратна връзка е устойчива. От ур. (3.43) и очевидното равенство

$$\mathbf{I} + (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{L}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{L}_0 + \Delta\mathbf{L}_0 = (\Delta\mathbf{L}_0(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0)^{-1} + \mathbf{I})(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0),$$

получаваме

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{G}_\Delta \mathbf{K}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0) \det(\mathbf{I} + \Delta \mathbf{T}_0).$$

Това уравнение дава връзка между полюсите на затворената верига на номиналната и на смутената система. Следователно, смутената система е устойчива, ако  $\bar{\sigma}(\Delta \mathbf{T}_0)$  е малка, а последното е изпълнено, ако  $\bar{\sigma}(\mathbf{T}_0)$  е малко за онези честоти, където  $\bar{\sigma}(\Delta)$  е голяма. Обикновено това са високите честоти. Следователно възниква още едно изискване.

**И5:** За да се получи *робастно устойчива* система с обратна връзка,  $\bar{\sigma}(\mathbf{T}_0)$  трябва да бъде малка при високи честоти.

И така, за да има малка грешка при управлението  $\bar{\sigma}(\mathbf{L}_0)$  трябва да бъде голямо, и в същото време, за да бъде системата нечувствителна спрямо шума от датчиците и спрямо грешките при моделиране, същата  $\bar{\sigma}(\mathbf{L}_0)$  трябва да бъде малка. Тези изисквания също следва да се интерпретират по отношение на честотите. За ниски честоти, качеството играе по-голяма роля и за високи честоти робастността е по-важна.

## 4. $H_2$ оптимално управление

С тази част на трета глава започваме разглеждането на синтез на управление. Идеята тук е разгледаме системата с обратна връзка като линеен оператор, който изобразява входа  $w$  в изхода  $z$ . Техническата система може да съдържа тегла. Тези тегла определят целите на синтеза и управлението трябва да бъде построено така, че да минимизира операторната норма на системата с обратна връзка. Най важните норми на линейни системи, описани със ОДУ, при синтеза на управление са  $H_2$  и  $H_\infty$  нормите.

Започваме със синтез на  $H_2$  оптимално управление. Отначало разгледаме една известна задача за квадратично оптимално управление. Полученото управление се нарича линеен квадратичен регулатор ЛКР. Той има вида  $u = Fx$ , където  $x$  е състоянието на системата. Това е класически подход и води до известното уравнение на Рикати, което играе ключова роля при синтеза на  $H_2$  и  $H_\infty$  управление. Общият случай на  $H_2$  задачата се решава на няколко стъпки чрез разделяне на първоначалната задача на няколко подзадачи. Основната идея е въвеждането на нова променлива  $v = u - Fx$ . Задачата за променливата  $v$  е задача за оценка на изхода. От своя страна тази задача е дуална на друга задача, а именно, задачата за предварително смущение. А този случай може да се интерпретира като частен случай на задачата за пълна информация, която по същество е ЛКР задачата. Същата концепция ще бъде използвана и за решаването на  $H_\infty$  задачата.

Едно приложение на  $H_2$  теорията е филтърът на Калман, който е специален вид наблюдател. Когато се комбинират линеен квадратично управление и филтърът на Калман, се получава линеен квадратично гаусово управление ЛКГ. То може да се разглежда като  $H_2$  задача. Разглеждат се робастните свойства. Изследва се как разполагането на полюсите на затворената верига влияе върху теглата за ЛК управление. Подобни изследвания служат за избор на подходящи тегла в ситуации от практиката. Комбинацията от ЛК управление и филтър на Калман може да доведе до недостатъчна робастност. В такива случаи ситуацията може да бъде подобрена чрез процедура, наречена предавателно възстановяване на веригата (loop transfer recovery), на което също е отделено внимание.

## 4.1. Линейно квадратично управление

### 4.1.1. Синтез на управление чрез минимизация на целева функция

Разглеждаме динамична система от вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1a)$$

и искаме да построим управление по обратна връзка на целия вектор на състоянието

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} \quad (4.1b)$$

където  $\mathbf{F}$  е матрица с подходящи размери. Това е задача за чиста стабилизация, подобна на тази, която разгледахме в предишната глава.

Ние поставяме задачата по различен начин, като синтеза на управлението се прави чрез минимизиране на известен целеви функционал. Нека

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} dt, \quad (4.2)$$

$\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  са симетрични матрици, а  $\mathbf{R}$  е положително определена. Нека матриците  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  такива, че

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.3)$$

Задачата е да се минимизира функционалът (4.2) по всички  $u \in L_2[0, \infty)$ , подчинени на ур. (4.1a). Положителната определеност на  $\mathbf{R}$  означава, че енергията на управлението е крайна. Матриците  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{S}$  са параметрите, по които се синтезира управлението. Обикновено се избира  $\mathbf{S} = 0$  и функционалът (4.1b) приема частния вид

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)) dt.$$

Тъй като  $R > 0$ , то съществува  $R^{1/2}$  и можем да въведем ново управление  $v = R^{1/2}u$ . В такъв случай трябва  $R = I$ , което ще предположим по-нататък без загуба на общност.

Нека препишем ур. (4.3) във вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{D}_{12}^T \end{pmatrix} (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}).$$

$\mathbf{C}_1$  е  $l \times n$  матрица, а  $\mathbf{D}_{12}$  е  $l \times m$  матрица. Тогава получаваме

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{z}\|_2^2 \quad \text{където} \quad \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}.$$

Ще отбележим, че

$$\mathbf{S} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}.$$

В много приложения, включително при числените симулации в тази работа, теглата са избрани при  $S = 0$ . Тогава при  $C_{10}^T C_{10} = Q$  и  $R = I$ , можем да запишем

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{10} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

И така, можем да формулираме следната оптимизационна задача

Да се минимизира  $\|\mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}\|_2^2$   
 подчинено на  $\mathbf{x}, \mathbf{u}$  с  $u \in L_2[0, \infty)$  и  
 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$

Тази задача се нарича задачата за **линейно квадратичен регулатор** ЛКР.

Отначало разглеждаме специалния случай на ЛКР задачата, където управлението е дадено чрез обратна връзка по състоянието с постоянни коефициенти. Минимизация се извършва по всички матрици  $\mathbf{F}$  с подходящ размер. Задачата се формулира по следния начин. Полагайки

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}_F = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}$$

получаваме

$$\mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} = \mathbf{C}_F \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} = \mathbf{A}_F \mathbf{x}.$$

Ако  $A_F$  е устойчива, следва че

$$\|\mathbf{C}_F \mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0$$

където  $\mathbf{X}$  е решение на следното уравнение на Ляпунов (ур. (2.32))

$$\mathbf{A}_F^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_F + \mathbf{C}_F^T \mathbf{C}_F = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

и  $\mathbf{X}$  зависи от  $\mathbf{F}$ . Минимизирайки  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0$  по всички  $\mathbf{F}$  нулираме градиента и получаваме

$$\mathbf{F} = -(\mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1), \tag{4.5}$$

където  $\mathbf{X}$  е решението на **алгебричното уравнение на Рикати**

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1)^T \mathbf{X} + \mathbf{X} (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1) - \mathbf{X} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X} + \mathbf{C}_1^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{12}^T) \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}. \tag{4.6}$$

ЛКР задачата има същото решение както при този специален случай, като допустими са само управления във вида  $u = Fx$ . Въвеждаме нова променлива

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{F} \mathbf{x}$$

и пресмятаме целевия функционал както в частния случай като използваме решението  $\mathbf{X}$  на уравнението на Ляпунов. Нека  $u \in L_2[0, \infty)$  е дадено и нека  $\mathbf{x}$  е съответното

решение на ур. (4.2). Тогава  $v = u - Fx$  също квадратично-обратимо. Следователно ЛКР задачата е еквивалентна на минимизирането на

$$\| \mathbf{C}_F \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} \|_2^2$$

подчинено на

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_F \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{L}_2[0, \infty).$$

Приемаме, че

$$\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}. \tag{4.7}$$

Тогава

$$\| \mathbf{C}_F \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} \|_2^2 = \langle \mathbf{x}^T, \mathbf{C}_F^T \mathbf{C}_F \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{x}^T, \mathbf{C}_F^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} \rangle + \| \mathbf{v} \|_2^2$$

Нека  $\mathbf{F}$  да има вида (4.5). Ур. (4.4) на Ляпунов се превръща в ур. (4.6) на Рикати и нормата се превръща в

$$\| \mathbf{C}_F \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{v} \|_2^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0 + \| \mathbf{v} \|_2^2. \tag{4.8}$$

Минимумът на тази норма се получава при  $v=0$  и отново  $u = Fx$  е оптимално управление. От ур. (4.7) се вижда, че стълбовете на  $D_{12}$  са ортогонални. Така  $m \leq l$  и можем да допълним броя на стълбовете до ортогонален базис в  $\mathbb{R}^l$ . Следователно, съществува матрица  $D_{\perp}$  такава, че  $(D_{12}, D_{\perp})$  е унитарна матрица:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{D}_{\perp}^T \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad \text{или} \quad \mathbf{D}_{\perp} \mathbf{D}_{\perp}^T = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_{12}^T.$$

**Теорема за ЛКР задачата:** Нека е дадена динамичната система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u},$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}$$

при следните предположения

(A1)<sub>LQR</sub> :  $(A, B_2)$  е стабилизируема.

(A2)<sub>LQR</sub> : Стълбовете на  $D_{12}$  образуват ортогонална система и  $D_{12}$  е допълнена с матрица  $D_{\perp}$  до унитарна матрица  $(D_{12}, D_{\perp})$ .

(A3)<sub>LQR</sub> :  $(C_1, A)$  е откриваема

(A4)<sub>LQR</sub> : . Матрицата

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega \mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix}$$

има пълен ранг по стълбове за всяко  $\omega$ .

Тогава  $u = Fx$  е единствено решение на ЛКР задачата, ако  $F$  е избрана по следния начин

$$F = -(B_2^T X + D_{12}^T C_1),$$

където  $X$  е решението на следното уравнение на Рикати

$$(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T X + X(A - B_2 D_{12}^T C_1) - X B_2 B_2^T X + C_1^T D_{12} D_{12}^T C_1 = 0. \quad (4.9)$$

Оптималната стойност на функционала е  $x_0^T X x_0$ . □ (□ – край на теоремата)

Предположени  $(A2)_{LQR}$  е преформулирано изискването  $R = I$ . Предположения  $(A1)_{LQR}$ ,  $(A2)_{LQR}$  и  $(A4)_{LQR}$  са необходими, за да се гарантира положителната полуопределено решение  $X$  на ур. (4.9). В частния случай  $S = C_1^T D_{12} = 0$  формулата за  $F$  и уравнението на Рикати придобиват вида

$$F = -B_2^T X,$$

$$A^T X + X A - X B_2 B_2^T X + C_1^T C_1 = 0.$$

#### 4.1.2. Алгебрично уравнение на Рикати

В алгебричното уравнение на Рикати

$$A^T X + X A + X R X + Q = 0. \quad (4.10)$$

$A$ ,  $R$ ,  $Q$  са реални  $n \times n$  матрици и  $R$ ,  $Q$  са симетрични. Към всяко уравнение на Рикати се присъединява  $2n \times 2n$  матрица на Хамилтон (Hamilton) или още хамилтониан

$$H = \begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{pmatrix},$$

Матриците  $H$  и  $-H^T$  са подобни, защото

$$J^{-1} H J = -H^T \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = -I$$

Ако  $\lambda$  е собствена стойност на  $H$ , то  $-\bar{\lambda}$  е собствена стойност на  $-H^T$ .

Нека предположим, че

(A1)  $H$  няма собствени стойности върху имагинерната ос;

$$(A2) \chi_-(H) \cap \text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} = \{0\}$$

Тъй като  $\chi_-(H)$  е  $n$ -мерно  $H$ -инвариантно подпространство в  $\mathbb{R}^{2n}$ , то съществува  $n \times n$  матрица  $H_-$  така, че

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \mathbf{H}_-. \quad (4.11)$$

Нека разгледаме

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (4.12)$$

Умножаваме ур. (4.11) с  $\mathbf{X}_1^{-1}$  от дясно

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} \mathbf{X}_1 \mathbf{H}_- \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (4.13)$$

и полученото умножаваме с  $(\mathbf{X}, -\mathbf{I})$  отляво. Така получаваме

$$(\mathbf{X} \quad -\mathbf{I}) \mathbf{H} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

което е точно ур. (4.10) на Рикати.

Нека  $\mathbf{H}$  е матрицата на Хамилтон, за която се изпълнени предположенията (A1) и (A2), и нека  $\mathbf{X}$  е единствена матрица, построена според ур. (4.12). Тогава операторът, който изобразява  $\mathbf{H}$  върху  $\mathbf{X}$  се означава с  $Ric$ ,

$$\mathbf{X} = Ric(\mathbf{H})$$

Този оператор е дефиниран върху множеството

$$dom(Ric) = \{ \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \mathbf{H} \text{ е матрица на Хамвилтон и изпълнява (A1), (A2)} \}.$$

Нека  $\mathbf{H} \in dom(Ric)$  и  $\mathbf{X} = Ric(\mathbf{H})$ . Тогава:

- (а)  $\mathbf{X}$  е решение на ур. (4.10) на Рикати.
- (б)  $\mathbf{X}$  е реална и симетрична матрица.
- (в)  $A + \mathbf{R}\mathbf{X}$  е устойчива.

Ако  $\mathbf{H}$  няма собствени стойности на имагинерната ос и  $\mathbf{R}$  е или положително или отрицателно полуопределена, то  $\mathbf{H} \in dom(Ric)$  тогава и само тогава, когато  $(A, \mathbf{R})$  е стабилизируема.

Ако  $(A, B)$  е стабилизируема,  $(C, A)$  няма ненаблюдаеми собствени стойности върху имагинерната ос и  $\mathbf{H}$  има вида

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T \mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix},$$

то  $\mathbf{H} \in dom(Ric)$  и  $\mathbf{X} = Ric(\mathbf{H})$  е положително полуопределена. Ако  $(C, A)$  няма устойчиви ненаблюдаеми собствени стойности, то  $\mathbf{X}$  е положително определена.  $\mathbf{X} = Ric(\mathbf{H})$  е положително определена и в случая, когато  $(A, B)$  е стабилизируема,  $(C, A)$  е наблюдаема.

Тук ще споменем още един резултат, който се ползва при числените експерименти в настоящата работа. Ако матрицата  $D$  е ермитова, т.е.  $D^T D = I$ ,  $\mathbf{H}$  има формата

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{D}^T)\mathbf{C} & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T \end{pmatrix},$$

$(A, B)$  е стабилизируема и матрицата

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

има пълен ранг по стълбове за всички  $\omega$ , то  $\mathbf{H} \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{X} = \text{Ric}(\mathbf{H})$  е положително определена.

Формулираме и една важен резултат, който се използва при построяване на  $H_2$  оптимално управление. Нека е дадено число  $\gamma > 0$  и предавателна функция

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) \in \mathcal{RH}_\infty.$$

Полагаме  $R = \gamma^2 I - D^T D$  и дефинираме

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T)\mathbf{C} & -(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{C})^T \end{pmatrix}.$$

Тогава следните твърдения са еквивалентни:

- (1)  $\|\mathbf{G}\|_\infty < \gamma$ .
- (2)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  и  $\mathbf{H}$  няма собствени стойности на имагинерната ос.
- (3)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  и  $\mathbf{H} \in \text{dom}(\text{Ric})$ .
- (4)  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  и  $\mathbf{H} \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{X} = \text{Ric}(\mathbf{H}) \geq 0$ .

## 4.2. Характеризиране на $H_2$ оптималните управления

### 4.2.1. Формулиране на задачата и основна теорема

Разглеждаме техническа система от вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \end{aligned} \quad \mathbf{P}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

с управление

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}(s) \hat{\mathbf{y}}$$

Означаваме  $F_{zw}(s)$  предавателната матрица на затворената система.

**Задачата за  $H_2$  оптимално управление** се състои

в намирането на правилно управление  $\mathbf{K}(s)$  такъв, че  $\mathbf{K}(s)$  стабилизира вътрешно  $\mathbf{P}(s)$  и  $H_2$  нормата на предавателната функция  $F_{zw}(s)$  на затворената верига да бъде минимизирана.

Нека за ЛКР задачата разгледаме управление  $u = F_2 y$  и импулсна начална стойност  $w = x_0 \delta(t)$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) \mathbf{x} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) \mathbf{x}.$$

Ако за частния случай  $w = e_k$  означим изхода с  $z_k$ , то получаваме

$$\|F_{zw}\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \|z_k\|_2^2.$$

Минимизирането на всяко събираемо  $\|z_k\|_2$  се постига с константна матрица  $\mathbf{F}$  на управлението, описана по-горе. Това управление е едно и също за всички събираеми и, следователно, също е решение и на  $H_2$  задачата. В този смисъл ЛКР задачата може да се разглежда като частен случай на  $H_2$  задачата.

Формулираме условия, при които  $H_2$  задачата за оптимално управление е решима:

(A1) $_{H2}$  :  $(A, B_2)$  е стабилизируема

(A2) $_{H2}$  :  $(C_2, A)$  е откриваема

(A3) $_{H2}$  : Стълбовете на  $D_{12}$  образуват ортогонална система и  $D_{12}$  е допълнена с матрица  $D_{\perp}$  до унитарна матрица  $(D_{12} \ D_{\perp})$ .

(A4) $_{H2}$  : Редовете на  $D_{21}$  образуват ортогонална система и  $D_{21}$  е допълнена с матрица  $\bar{D}_{\perp}$  до унитарна матрица

$$\begin{pmatrix} D_{21} \\ \bar{D}_{\perp} \end{pmatrix}.$$

(A5) $_{H2}$  : Следната матрица има пълен ранг по стълбове за всички  $\omega$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix}.$$

(A6) $_{H2}$  : Следната матрица има пълен ранг по редове за всички  $\omega$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix}.$$

За удобство формулираме следните матрици на Хамилтон

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{D}_{12}^T\mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T\mathbf{D}_1\mathbf{D}_1^T\mathbf{C}_1 & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}_2\mathbf{D}_{12}^T\mathbf{C}_1)^T \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T - \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_1^T & -\mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\bar{\mathbf{D}}_1^T\bar{\mathbf{D}}_1\mathbf{B}_1^T & -(\mathbf{A}^T - \mathbf{C}_2^T\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_1^T)^T \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

От изложеното по горе се вижда, че и двете матрици лежат в областта на оператора на Рикати.  $\mathbf{H}_2, \mathbf{J}_2 \in \text{dom}(\text{Ric})$  Освен това матриците  $\mathbf{X}_2 = \text{Ric}(\mathbf{H}_2)$  и  $\mathbf{Y}_2 = \text{Ric}(\mathbf{J}_2)$  са положително полуопределени.

Основният резултат се дава със следната теорема.

**Теорема за  $\mathbf{H}_2$  задачата** [41]: Нека са изпълнени предположения  $(A1)_{H2} - (A6)_{H2}$ .  
Чрез матриците  $\mathbf{H}_2$  от ур. (4.14) и  $\mathbf{J}_2$  от ур. (4.15) и

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 &= \text{Ric}(\mathbf{H}_2) & \mathbf{Y}_2 &= \text{Ric}(\mathbf{J}_2) \\ \mathbf{F}_2 &= -(\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_2 + \mathbf{D}_{12}^T\mathbf{C}_1), & \mathbf{L}_2 &= -(\mathbf{Y}_2\mathbf{C}_2^T + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_{21}^T) \\ \tilde{\mathbf{A}}_2 &= \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2\mathbf{C}_2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_F &= \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2, & \mathbf{C}_{1F} &= \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{A}_L &= \mathbf{A} + \mathbf{L}_2\mathbf{C}_2, & \mathbf{B}_{1L} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{D}_{21} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{G}_F(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_{1F} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \mathbf{G}_L(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_{1L} \\ \hline -\mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad (4.18)$$

Тогава  $\mathbf{H}_2$  задачата има за единствено решение с оптималното управление

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (4.19)$$

и оптималната стойност се определя с израза

$$\min \|\mathbf{F}_{zw}\|_2^2 = \|\mathbf{G}_F\|_2^2 + \|\mathbf{G}_L\|_2^2. \quad \square$$

1. Решението на  $\mathbf{H}_2$  задачата е управление с наблюдател. В пространството на състоянията уравненията за наблюдателя и за управлението имат следния вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}_2\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}_2\mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{F}_2\tilde{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Те могат да бъдат изписани още във вида

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{F}_2 \tilde{\mathbf{x}} . \end{aligned}$$

Тук  $\tilde{\mathbf{x}}$  е оценката на наблюдателя за  $\mathbf{x}$ .

2. В частния случай  $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{D}_{21} \mathbf{B}_q^T = \mathbf{0}$  уравненията на Рикати за управлението и за наблюдателя приемат вида

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

3. Ако може да се замерва целият вектор на състоянието, то наблюдателят не е необходим повече и управлението се редуцира до

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}_2 .$$

#### 4.2.2. Обратна връзка по състояния

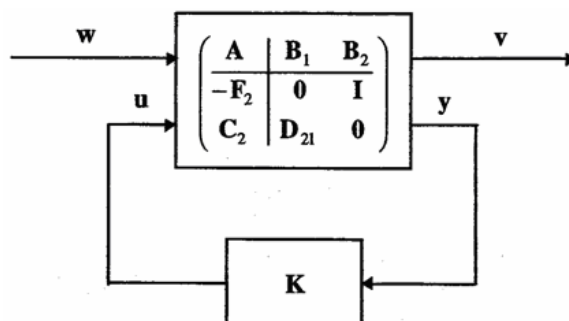
Важна идея при получаване на единственото решение за  $\mathbf{H}_2$  оптималната задача е да се въведе нова променлива  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{F}_2 \mathbf{x}$ . С помощта на тази променлива става възможна декомпозицията на предавателната функция  $F_{zw}$  на затворената верига.

Нека определим системата  $G_v$  чрез уравненията

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{v} &= -\mathbf{F}_2 \mathbf{x} + \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \end{aligned}$$

И нека  $K(s)$  е стабилизиращо управление за техническата система  $G_v$  (Фиг.4.1)

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}(s) \hat{\mathbf{y}} .$$



Фигура 4.1. Определяне на  $F_{yw}$

Тогава уравненията за състоянието на оригиналната техническа система предполагат

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \mathbf{F}_{zw} \hat{w} = \mathbf{C}_{1F} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1} \mathbf{B}_1 \hat{w} + (\mathbf{C}_{1F} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_F)^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{12}) \hat{v} \\ &= \mathbf{G}_F \hat{w} + \mathbf{U} \mathbf{F}_{vw} \hat{w},\end{aligned}$$

където

$$\mathbf{U}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_F & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_{1F} & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right).$$

Системата  $G_v$  може да се разглежда като техническа система, която се стабилизира от управлението  $\mathbf{K}$ . Тогава

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{zw} &= \mathbf{G}_F + \mathbf{U} \mathbf{F}_{vw} \\ \|\mathbf{F}_{zw}\|_2^2 &= \|\mathbf{G}_F\|_2^2 + \|\mathbf{F}_{vw}\|_2^2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Отначало разглеждаме случая, когато управлението може да използва целия вектор на състоянията. Тогава техническата система и законът за обратната връзка са

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{K}(s) \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Тази ситуация е подобна на ЛКР задачата. Затова, ако предположения  $(A1)_{H_2}$ ,  $(A3)_{H_2}$  и  $(A5)_{H_2}$  са изпълнени, то управлението с постоянна матрица, което решава ЛКР задачата, е също оптимално решение за  $\mathbf{H}_2$  задачата с обратна връзка по състоянията

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}_2.$$

Оптималната стойност на нормата на предавателната функция се дава с израза

$$\min \|\mathbf{F}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{G}_F\|_2.$$

### 4.2.3. Основна теорема

Техническата система  $G_v$  на трансформираната система има специална структура: това е така наречената задача за оценка на изхода. Тази задача е дуалната на задачата с предварително подаване (feedforward) на смущенията. Решението за задачата с пълна информация е по същество същото както за ЛКР задачата. Така, че трябва да се решат всички тези подзадачи, но в обратен ред. Крайният резултат ще бъде основната теорема за  $\mathbf{H}_2$  управленията.

Нека е дадена обща схема за обратна връзка (Фиг.3.2). Ще използваме означението

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathbf{F}_{zw}.\tag{4.22}$$

**Задача с пълна информация.**

Първият частен случай се описва със системата

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

В този случай

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

и управлението може да използва не само вектора на състоянието  $\mathbf{x}$ , но също и вектора на смущенията  $\mathbf{w}$ . Тази задача се нарича *задача с пълна информация* (ПИ).

За ПИ задачата, при условие, че са изпълнени предположения  $(A1)_{H2}$ ,  $(A3)_{H2}$  и  $(A5)_{H2}$ , оптималното управление и оптималната стойност на нормата на предавателната матрица са

$$\mathbf{K}(s) = (\mathbf{F}_2 \quad \mathbf{0}),$$

$$\min \|\mathbf{F}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{G}_F\|_2.$$

Управлението при ПИ задачата не използва смущенията както при задачата за обратна връзка по състоянията.

**Задача с предварително подаване на смущенията (ПС)**

ПС задачата е вторият важен частен случай. Тук по дефиниция имаме  $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{I}$  и ПС задачата приема вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{w}.$$

Системата ще означаваме с  $P_{DF}$ . Тя може да се разглежда като частен случай на ПИ задачата (Фиг.4.2).

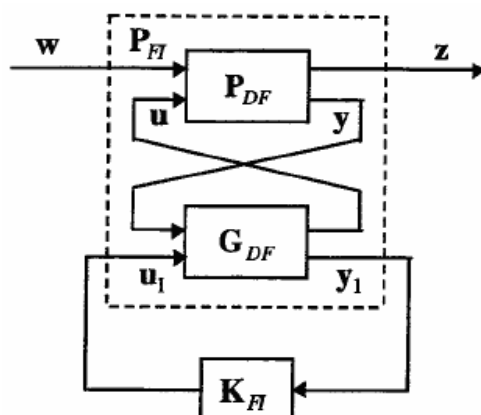
Тук  $G_{DF}$  се определя по следния начин

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{C}_2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{y} \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме предавателната функция  $P_{FI}$ . Заменяйки променливата  $x_1$  с  $e = x - x_1$ , системата има реализацията



Формула 4.2. Разширение на ПС задачата до ПИ задача

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2) \mathbf{e}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{e} \\ \mathbf{C}_2 \mathbf{e} + \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Заместваме уравнението на втория изход с

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}.$$

Това не влияе на нормата и на вътрешната устойчивост на съответната система с обратна връзка. Така получаваме ПИ задачата. Нека  $\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2$  да е устойчива. От предположение  $(AI)_{H2}$  следва, че  $P_{FI}$  е стабилизируема. Така стигаме до съотношението

$$\mathcal{F}_l(\mathbf{P}_{DF}, \mathcal{F}_l(\mathbf{G}_{DF}, \mathbf{K}_{FI})) = \mathcal{F}_l(\mathbf{P}_{FI}, \mathbf{K}_{FI}).$$

и получаваме за управлението на  $P_{DF}$  е

$$\mathbf{K}_{DF} = \mathcal{F}_l(\mathbf{G}_{DF}, \mathbf{K}_{FI}).$$

И от тук получаваме

$$\mathbf{K}_{PI}(s) = (\mathbf{F}_2 \quad \mathbf{0}).$$

Използвайки определението за  $G_{DF}$  получаваме представяне за  $K_{DF}$  както следва

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2) \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \mathbf{y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_1.$$

И така, ако са изпълнени предположения  $(A1)_{H_2}$ ,  $(A3)_{H_2}$  и  $(A5)_{H_2}$ , и ако  $A - B_1 C_2$  е устойчива, то  $H_2$  оптималното управление и оптималната стойност за нормата за ПС задачата се дават с изразите

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right). \quad \min \|\mathbf{F}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{G}_F\|_2.$$

### Задача за оценка на изхода (ОИ)

$H_2$  оптимизационната задача за техническата система от вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \end{aligned} \tag{4.23}$$

ее нарича *задача за оценка на изхода* (ОИ). За обща техническа система  $P$  и за общо управление  $K$  може да се провери, че

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \mathcal{F}_l(P^T, K^T)^T.$$

Транспонирането не влияе на нормата и на вътрешната устойчивост. Получените изводи за ПИ задачата водят до следния резултат.

Ако са изпълнени условия  $(A2)_{H_2}$ ,  $(A4)_{H_2}$  и  $(A6)_{H_2}$ , и ако  $A = B_2 C_1$  е устойчива, то  $H_2$  оптималното управление и оптималната стойност за ОИ задачата се дават с формулите

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

$$\min \|\mathbf{F}_{zw}\|_2 = \|\tilde{\mathbf{G}}_L\|_2, \quad \tilde{\mathbf{G}}_L(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_L & \mathbf{B}_{1L} \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right). \tag{4.24}$$

### 4.3. Филтър на Калман-Буси

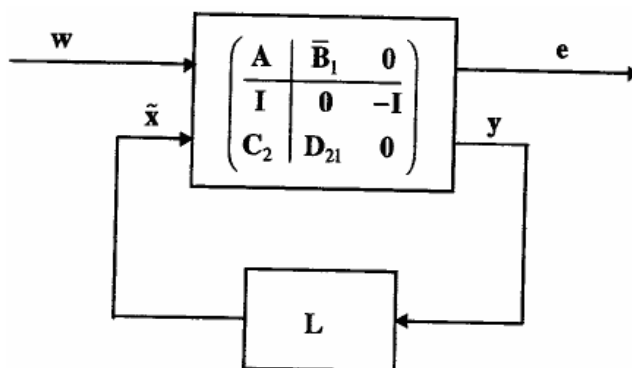
В този параграф представяме филтър на Калман-Буси като частен случай на  $H_2$  оценител на състояния. Да разгледаме динамичната система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{w}} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \bar{\mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Задачата е да се оцени векторът на състоянието  $\mathbf{x}$ , породен от смущението  $\mathbf{w}$ . Тук  $\tilde{\mathbf{x}}$  е оценката, а  $L(s)$  е динамична система с вход – изхода  $\mathbf{y}$  (Фиг.4.3).

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L}(s) \hat{\mathbf{y}}.$$

Търсим оценител, който минимизира  $\|F_{ew}\|_2$ . Това е ОИ задача с  $B_2 = 0$  и казаното до тук не може да бъде директно приложено, ако  $A$  не е устойчива. Когато ОП задачата се преформулира като ПИ задача, е възможно да се синтезира вътрешно стабилизиращо управление за задачата без да участва неустойчивата динамика, причинена от  $A$ .



Фигура 4.3. Оценител на състояния

Понеже разглеждаме филтър, то изключваме динамиката на системата. Тогава

$$\mathbf{L}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

и уравнението за състоянието на оценителя става

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2) \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}_2 \mathbf{y}. \quad (4.25)$$

Тъй като  $C_1 = I$ , то

$$\min \|F_{ew}\|_2 = \text{trace}(\mathbf{Y}_2). \quad (4.26)$$

Разглеждаме системата

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{W}^{1/2} \mathbf{w}_e$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{v}_e.$$

Смущението се състои от две части – смущение на техническата система  $w$  и смущение на измерването  $v$ . Матриците  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{V}$  са тегла за синтеза на оценителя (Фиг.4.4). Приемаме, че те са симетрични и  $\mathbf{W}$  е положително полуопределена, а  $\mathbf{V}$  е положително определена. Тогава имаме:

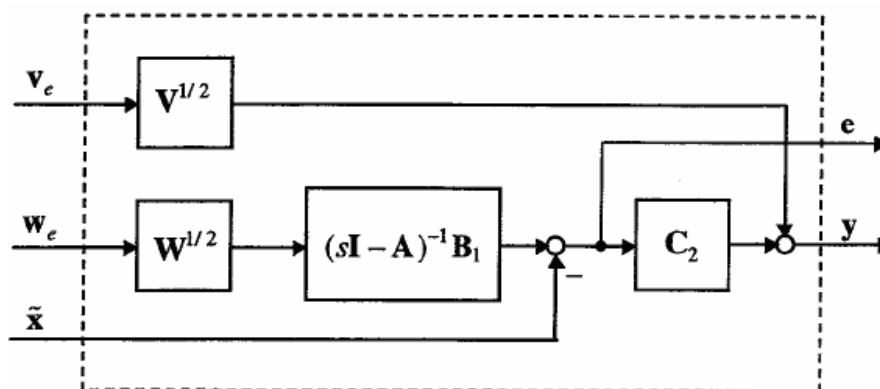
$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = (\mathbf{B}_1 \mathbf{W}^{1/2} \quad \mathbf{0}), \quad \mathbf{D}_{21} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{V}^{1/2})$$

и  $D_{21} \bar{B}_1^T = 0$ . Коэффициентът за филтъра се получава

$$\mathbf{L}_2 = -\mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{V}^{-1}, \quad (4.27)$$

където  $\mathbf{Y}_2$  е решението на следното уравнение на Рикати

$$\mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{W} \mathbf{B}_1^T = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$



Фигура 4.4. Техническа система за филтър на Калман-Буси

$\mathbf{H}_2$  оценителят е особено интересен, ако смущенията са случайни процеси. Нека  $w_e$  и  $v_e$  са бял шум процеси, чиито спектрални плътности са единични матрици. Тогава  $w$  и  $v$  са бели шумове със спектрални честоти  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{V}$ :

$$E(\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)) = \mathbf{W} \delta(t - \tau)$$

$$E(\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)) = \mathbf{V} \delta(t - \tau).$$

Резултатът за филтър на Калман Буси може да се формулира по следния начин:

Нека е дадена система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

където  $w(t)$  и  $v(t)$  на некорелирани бели шумове, чиито спектрални плътности се описват с положително полуопределена матрица  $\mathbf{W}$  и положително определена матрица  $\mathbf{V}$ . Предполагаме, че  $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A})$  е откриваема, и че  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1 \mathbf{W}^{1/2})$  няма неуправляеми собствени стойности върху имагинерната ос. Нека  $\mathbf{L}_2$  е матрица, дефинирана с ур. (4.27) и (4.28). Тогава линейната система

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \quad (4.29)$$

определя оценител на състояние, който минимизира средно квадратичната стойност  $E[\mathbf{e}_\infty^T \mathbf{e}_\infty]$  на грешката на стационарната оценка  $\mathbf{e}_\infty = \mathbf{x}_\infty - \tilde{\mathbf{x}}_\infty$ . Ковариантната матрица на грешката на стационарната оценка се дава с израза

$$E[\mathbf{e}_\infty \mathbf{e}_\infty^T] = \mathbf{Y}_2.$$

Следва да се отбележи, че филтърът на Калман е синтезиран по отношение на оптимална стационарна стойност на грешката  $e = x - \tilde{x}$ . По отношение на други свойства, този филтър може да не бъде толкова предпочитан. В такива случаи матриците  $W$  и  $V$  могат да се използват като параметри на синтеза.

#### 4.4. ЛКГ управление

##### 4.4.1. ЛКГ управлението като частен случай на $H_2$ управлението

ЛКР управлението може да се комбинира с филтъра на Калман. Това води до линейно квадратично гаусово (ЛКГ) управление. За този случай, техническата система се дава във вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{v}$$

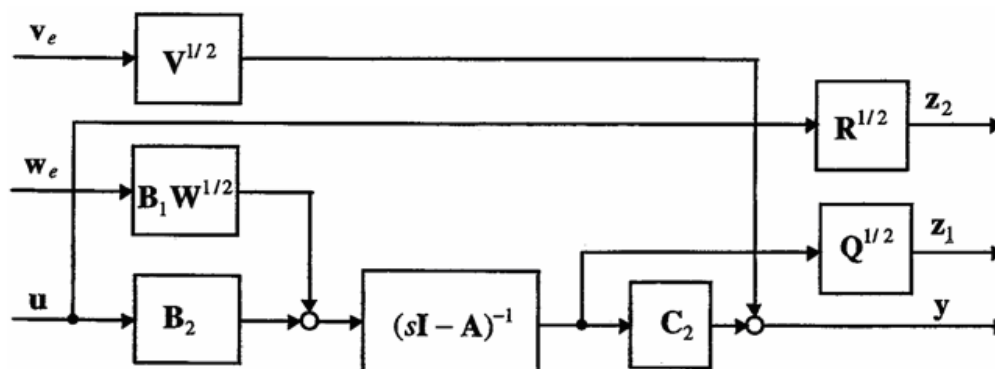
Тук  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  са бели шумове със спектрални плътности  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{V}$ . Задачата е да се намери управление

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}(s) \hat{\mathbf{y}}$$

което минимизира очакването

$$E[\mathbf{x}_\infty^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_\infty + \mathbf{u}_\infty^T \mathbf{R} \mathbf{u}_\infty]. \tag{4.30}$$

Тук  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  са матрици както при ЛКР задачата.



Фигура 4.5. Техническа система за синтез на ЛКГ управление

ЛКГ задачата може да се интерпретира като частен случай на  $H_2$  задачата (Фиг.4.5). Ключът е интерпретацията на  $H_2$  нормата. Необходимите предположения са:

(A1)<sub>ЛКГ</sub>  $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема.

(A2)<sub>ЛКГ</sub>  $(A, B_1 W^{1/2})$  няма неуправляеми собствени стойности върху имагинерната ос и  $(Q^{1/2}, A)$  няма ненаблюдаеми собствени стойности върху имагинерната ос.

(A3)<sub>ЛКГ</sub> Матриците  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{V}$  са положително определени и матриците  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{W}$  са положително полуопределени.

Ако условия (A1)<sub>ЛКГ</sub> – (A3)<sub>ЛКГ</sub> са изпълнени и  $X_2$  и  $Y_2$  са решенията на следните уравнения на Рикати:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{Q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{W} \mathbf{B}_1^T &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

и ако с  $F_2$  и  $L_2$  означим следните матрици

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2, \quad \mathbf{L}_2 = -\mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{V}^{-1},$$

то ЛКГ задачата има за единствено решение оптималното управление

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} + \mathbf{L}_2 (\mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{F}_2 \tilde{\mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Както се вижда, ЛКГ управлението се състои от филтър на Калман и управление с постоянна матрица, което подава обратно оценката на вектора на състоянието. Филтърът на Калман по същество има формата (4.29). Единствената разлика е частта, породена от управлението, която може да се разглежда като отклонение. Управлението може да се запише компактно във вида

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2. \tag{4.32}$$

Синтезът на ЛКГ управление изисква смущенията на техническата система и шумът при измерването да бъдат бели шумове. За шума при измерването това често е естествено предположение, докато стохастически модел за техническата система в много случаи не съществува. Дори и в тези случаи ЛКГ синтезът е смислен. В такива случаи спектралната плътност  $\mathbf{W}$  за шумът в техническата система следва да се разглежда като параметър на синтеза.

#### 4.4.2. Оценка на входната матрица за връщане на разлика

Предавателната матрица на веригата при входа  $L_i$  за управление с обратна връзка по състояния се дава с формулата.

$$\mathbf{L}_i(s) = -\mathbf{F}_2 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2.$$

Следвайки изложеното в част 3.3. имаме

$$\mathbf{P}_{12}(s) = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_{12}$$

$$\mathbf{P}_{22}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2.$$

Показва се, че е в сила следното равенство

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i^T(-s))(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(s)) = \mathbf{P}_{12}^T(-s) \mathbf{P}_{12}(s). \quad (4.33)$$

В частния случай  $D_{12}^T C_1 = 0$ , ур. (4.33) може да се запише във вида

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i^T(-s))(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(s)) = \mathbf{I} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_{22}^T(-s) \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_{22}(s) \mathbf{B}_2. \quad (4.34)$$

Матрицата  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_i$  се нарича **входната матрица за връщане на разлика** (input return difference matrix). В случая  $D_{12}^T C_1 = 0$  е в сила следното неравенство

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega))^* (\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega)) \geq \mathbf{I} \quad (4.35)$$

За SISO системи това неравенство придобива вида

$$|1 + L(i\omega)| \geq 1.$$

#### 4.4.3. Полюси на системи с ЛКР обратна връзка и възстановяване на преноса във веригата

**Полюси на веригите с ЛКР обратна връзка.** Един решителен момент при синтеза на ЛКР управление е изборът на тегловните матрици  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{V}$  (Фиг.4.5). Отначало разглеждаме задачата за  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  коефициентите на управлението за обратна връзка по състояние. Не е възможно изискванията за качество да се преведат директно в избор на  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ , но това може да бъде направено индиректно чрез изучаване на зависимостта на  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$  от полюсите на затворената верига.

Полюсите на затворената верига на система с ЛКР обратна връзка са нулите на

$$p(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2).$$

Нашата цел е да изразим това характеристично уравнение в смисъл на тегловните матрици. Означаваме с  $q(s)$  характеристичния полином на  $\mathbf{A}$ :

$$q(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}).$$

Предавателната функция  $\mathbf{I} + \mathbf{L}_i$  има следното представяне в пространството на състоянията:

$$\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline -\mathbf{F}_2 & \mathbf{I} \end{array} \right).$$

и от тук имаме

$$p(s) = q(s) \det(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(s)) \quad p(-s) = q(-s) \det(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i^T(-s)).$$

е е в сила следното равенство

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i^T(-s)) \mathbf{R} (\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(s)) = \mathbf{R} + \mathbf{B}_2^T (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Q} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2.$$

Това е точно ур. (4.34) без нормализирането  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ . И така, в сила е следното равенство

$$p(s) \det \mathbf{R} p(-s) = q(s) q(-s) \det(\mathbf{R} + \mathbf{B}_2^T (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2).$$

Числата  $s$  и  $-s$  са едновременно нули на уравнението

$$r(s) = q(s) q(-s) \det(\mathbf{R} + \mathbf{B}_2^T (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2).$$

Следователно, полюсите на веригата с ЛК обратна връзка на нулите на  $r(s)$ , лежащи в лявата полуравнина. Сега можем да анализираме асимптотичното поведение на нулите на  $r(s)$ . Нека  $R = \rho R_0$  с положително определена матрица  $R_0$  и с положителен скаларен параметър  $\rho$ .

В случай на *голямо тегло* за управлението, нулите са приблизително нулите на

$$r_\infty(s) = q(s)q(-s).$$

В случай на *малко тегло* за управлението,  $\rho \rightarrow 0$  и полиномът  $r(s)$  клони към

$$r_0(s) = q(s)q(-s) \det(\mathbf{B}_2^T (-s\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{Q}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_2).$$

Нека представим  $Q$  във вида  $Q = C_{10}^T C_{10}$  и да въведем квадратната предавателна функция

$$\mathbf{G}_1(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_{10} & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

Тогава получаваме

$$r_0(s) = q(s)q(-s) \det \mathbf{G}_1^T(-s) \det \mathbf{G}_1(s).$$

И допълнително да предположим, че полюс на  $G_1(s)$  не е трансмисионна негова нула. Тогава  $G_1(s)$  може да се представи във вида

$$\mathbf{G}_1(s) = \frac{\mathbf{M}(s)}{q(s)}, \text{ където коефициентите на } M(s) \text{ са полиноми.}$$

Тогава уравнението

$$\det \mathbf{G}_1(s) = \det\left(\frac{1}{q(s)} \mathbf{M}(s)\right) = \frac{1}{q(s)^n} \det \mathbf{M}(s)$$

означава, че  $r_0(s_0) = 0$  тогава и само тогава, когато  $s_0$  е трансмисионна нула на  $G_1(s)$  или когато  $-s$  е трансмисионна нула на  $G_1^T(-s)$ . Тогава граничното поведение на полюсите на затворената верига може да се определи по следния начин.

Ако тегловната матрица  $\mathbf{R}$  е дадена във вида  $R = \rho R_0$ , където  $R_0$  е положително определена матрица и  $\rho$  е положителен скаларен параметър, то:

(а) При  $\rho \rightarrow 0$  полюсите на системата с ЛК обратна връзка клонят към устойчивите полюси на техническата система и към симетричните на неустойчивите полюси на техническата система относно имагинерната ос.

(б) Ако тегловната матрица  $Q$  е декомпозирана като  $Q = C_{10}^T C_{10}$  и системата  $G_1(s)$  е квадратна и броят на трансмисионните нули на  $G_1(s)$  е  $l$ , то за  $\rho \rightarrow 0$ ,  $l$  от всичките  $n$  полюса на затворената верига клонят към нулите на  $G_1(s)$ , разположени в лявата полуравнина или към симетричните на полюсите на  $G_1(s)$ , разположени в дясната полуравнина, относно имагинерната ос. Останалите  $n-l$  полюса на затворената верига клонят към безкрайност в лявата полуравнина.

**Възстановяване на преноса във веригата.** Когато шумът на техническата система е слаб, оценката от филтъра на Калман е основава главно на предсказване на състоянието на състоянието на техническата система, докато измерванията са почти игнорирани. Относно качеството на системата с обратна връзка, това не е критично, но свойствата на добра робастност на ЛКР управлението могат да бъдат загубени. При определени предположения е възможно да бъде възстановена добрата робастност на ЛКР управлението чрез увеличаване на шума на техническата система. В някои случаи дори е необходимо да се въведе допълнителен изкуствен шум. Този метод носи името **възстановяване на преноса във веригата**. Тогава матрицата, която моделира спектралната плътност вече не описва нейната действителна големина и следва да се разглежда като параметър на синтеза. Тогава оценката на филтъра на Калман е по-неточна и се жертва качеството в полза на робастността.

Ако шумът в техническата система идва от управляващото устройство, тогава този шум може да бъде увеличен и да доведе до LTR. В противен случай, трябва да бъде добавен фиктивен шум към уравнението на техническата система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{w}}.$$

Тук  $\tilde{\mathbf{w}}$  е допълнителният шум с ковариантна матрица  $\tilde{\mathbf{W}}$ , чиято норма ще предполагаме клони към  $\infty$ . Тогава предавателната функция на отворената верига  $L_i(s)$  за системата с филтър на Калман клони към съответната предавателна функция на веригата с ЛКР обратна връзка, ако са изпълнени следните предположения:

- (а) Броят на замерванията е не по-малък от броя на управленията.
- (б) Всички нули на предавателната функция на техническата система

$$\mathbf{C}_2(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_2$$

са в отворената лява полуравнина.

## 4.5. ЛКГ управление в интелигентни структури

### 4.5.1. Оптимален наблюдател и синтез на ЛКГ управление за интелигентни строителни структури

ЛКР алгоритъмът изисква да могат да бъдат замервани. При строителни структури това не е случаят, а е възможно да бъдат замервани само оценки за състоянието. Нека

предположим, че съществува смущение  $w$  при входа на системата, че замерваната оценка представлява линейна комбинация на състоянията (т.е. на отместванията), и че има шум  $v$  при изхода. Тогава с структурата ще има следните уравнения на движение

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + DF + \Gamma w \\ y &= Cx + v \end{aligned} \quad (4.36)$$

където  $x = [x \ \dot{x}]^T$  е векторът на състоянията,  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$  е системната матрица,  $B = [0 \ M^{-1}H]^T$  матрицата при входа на управлението,  $F$  е приложената сила,  $D = [0 \ M^{-1}]_r^T$  е матрицата, описваща местата на прилагане на външната сила.. Матрицата  $C$  описва структурата на изхода  $y$ . Матрицата  $\Gamma$  описва местата на появяване на шума. Предполагаме, че входните смущения  $w$  и шумът при измерването  $v$  са гаусови стационарни случайни процеси с нулево математическо очакване ( $E(w)=0, E(v)=0$ ) и известна дисперсия

$$\begin{aligned} E[w(t), w^T(t+\tau)] &= Q_0 \delta(t-\tau) \\ E[v(t), v^T(t+\tau)] &= R_0 \delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.37)$$

От получените замервания трябва да оценим състоянието на структурата. Нека означим вектора на оцененото състояние с  $\hat{x}$ . Да разгледаме следната динамична система, представляваща Луенбергер оценител

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + DF + L(y - C\hat{x}) \\ \hat{x}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

където  $L$  е матрицата-коэффициент на наблюдателя. Системата (4.38) симулира системата (4.36) и „наказва” разликата между измерения изход  $y$  и оценения изход  $C\hat{x}$ . Изваждайки ур. (4.38) и (4.36) и означавайки грешката при наблюдение с  $x - \hat{x} = e$ , получаваме уравнението на грешката

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - LC)e + \Gamma w - Lv \\ e(0) &= x(0) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ако всички собствени стойности на матрицата  $A-LC$  имат отрицателни реални части, грешката  $e$  клони асимптотически към нула. Ако системата (4.36) е напълно наблюдаема, собствените стойности могат да бъдат разположени произволно дълбоко в лявата комплексна полуравнина, и така, получавайки бърз оценител [47].

За да се получи оптимален наблюдател, за матрицата  $L$  ние прилагаме филтъра на Калман Буси. При условие, че двойката  $(C, A)$  е откриваема, дисперсионната матрица  $R_0$  в ур. (4.37) е положително определена, и че съществува матрица  $H_0$  такава, че  $H_0 H_0^T = Q_0$  и двойката  $(A, H_0)$  е стабилизируема, оптималната матрица  $L$  се получава от минимизирането на вариацията

$$J_e = E[(ae), (ae)^T] = aSa^T \quad (4.40)$$

за произволен вектор  $a$ . Матрицата  $S$  е решението на алгебричното уравнение на Рикати

$$AS + SA^T + Q_0 + SC^T R_0^{-1} CS = 0 \quad (4.41)$$

Оптималното решение за матрицата  $L$  се получава като

$$L = SC^T R_0^{-1} \quad (4.42)$$

Ако матрицата  $R_0$  на интензивността на изходния шум е голяма, то матрицата на наблюдателя  $L$  става малка и се ограничава да подтиска усилването на изходния шум чрез събиращемата  $Lv$  в ур. (4.39). Когато матрицата  $Q_0$  на интензивността на входното смущение е голяма, матрицата на наблюдателя  $L$  нараства и смекчава грешката, която се причинява от този шум.

Като използваме системата (4.36), използвайки оптималното уравнение  $u = -Kx$  ( $K = R^{-1}B^T P$ ) и ур. (4.39), получаваме системата

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} \Gamma & 0 \\ \Gamma & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$y = Cx$$

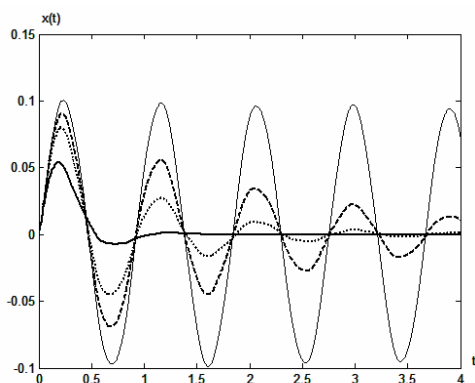
която дава ЛКГ алгоритъма. Устойчивостта на затворената система (14) зависи от устойчивостта на двете подсистеми и беше обсъдена по-горе.

**Числени резултати.** За качеството на оптималното управление е важно месторазположението на управляващите устройства и на датчиците в строителната структура. Броят на възможните комбинации за тяхното разполагане даже при малки структури е огромен [48]. Освен това ще отбележим, че е съществено да се минимизира реакцията на сградата във хоризонтална посока [49–50].

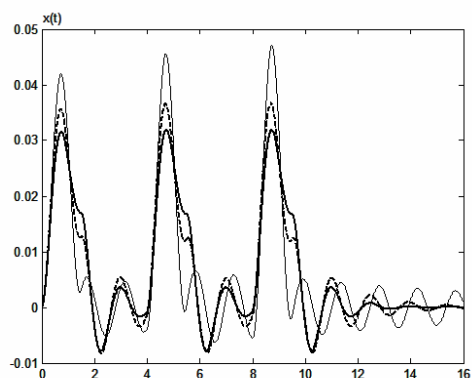
Разглеждаме двуетажна постройка моделирана с МКЕ. Разглеждаме оптимално управление във възлите на структурата. Отначало са използвани четири управляващи устройства, което са разположени по две различни схеми в хоризонтална посока по диагоналите на етажите на сградата. За симулациите използваме две или едно управляващо устройство.

Изследването е проведено с два вида динамично натоварване. Едното натоварване симулира сеизмичен тласък и представлява моментна хоризонтална константна сила. Второто натоварване симулира силен вятър и представлява периодична импулсна хоризонтална сила. Получава се отворената верига на системата. Добавяйки ЛКГ управлението, получаваме затворената верига на системата. Сравнява се ответната реакция на системата с отворена и затворена верига по отношение на намаляване на максималното преместване в хоризонтална посока и по отношение на времето за погасяване на вибрациите.

Използват се три различни стойности за тегловната матрица  $Q$  с цел да се изследва ответната реакция на строителната структура по отношение на различната важност на състоянията при управляването. Фиг.4.6 показва хоризонталното преместване на втория етаж на сградата при ЛКГ оптимално управление при импулсно натоварване.



Фигура 4.6..



Фигура 4.7.

Сравнено е поведението на системата с отворена верига (тънка) и със затворена верига с фактор  $q$  равен на 300 (пунктирана), 1500 (точкова) и 15000 (плътна). Следователно, избирайки подходяща стойност за фактора  $q$ , може да се постигне значително намаляване на пика. Фиг. 4.7 показва сравняването на хоризонталните премествания на втория етаж при свободни вибрации на сградата (тънка) и управляемото ѝ поведение при хоризонтално разположени (плътна) и диагонално разположени (пунктирана) управляващи устройства при периодично импулсно натоварване.

#### 4.5.2. $H_2$ управление на високи сгради

Разглеждаме двумерен линеен модел на многоетажна сграда с  $n$  степени на свобода, подложена на натоварване, зависещо от времето. Уравненията на движение след МКЕ дискретизирани имат вида

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = HF(t) + EU(t) \quad (4.44)$$

Система (1.1) може да се препише във вида

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \quad (4.45)$$

където  $x = (X, \dot{X})^T$  е векторът на състоянията,  $u$  е управлението,  $w$  е външното натоварване. Нека с  $y$  означим измерваните сигнали, изпращани към управляващото устройство

$$y = C_2x + D_{21}w \quad (4.46)$$

Нека  $z$  са управляемите изходи, които предполагаме линейна комбинация на състоянията.

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (4.47)$$

Предполагаме, че сградата е в състояние на покой (началните условия са нулеви). Целта е да определим силите  $u(t)$  според даден критерий за качество, удовлетворяващи ур.(4.44)-(4.45), така че да се редуцират външните влияния. Разглеждаме оптимален критерий с безкраен оптимизационен хоризонт.

Предполагаме, че  $(A, B_2)$  управляема и търсим линейно управление по обратна връзка във вида

$$u = -Kx \tag{4.48}$$

така, че да е удовлетворен квадратичният функционал

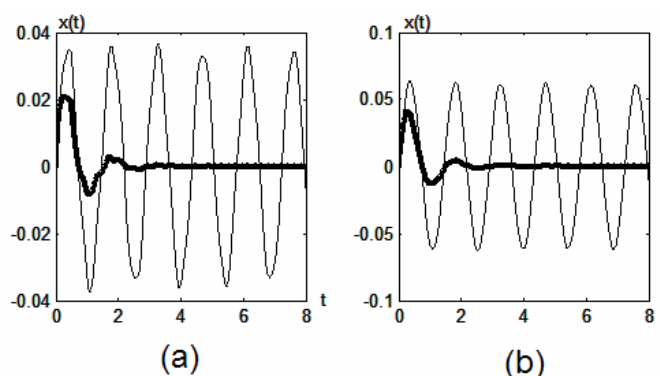
$$J = \int_0^{\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \rightarrow \min. \tag{4.49}$$

Решението на оптималната ЛКР задача е постоянна матрица  $K$  от вида

$$K = R^{-1}(B_2^*P + S^*)$$

където  $P$  е решението на уравнението на Рикати, което в случая съществува и е единствено, защото двойката  $(A, B_2)$  е управляема, а двойката  $(A - B_2R^{-1}S^*, W)$  с  $W$  такава, че  $WW^* = Q - SR^{-1}S^*$ , е откриваема.

На Фиг.4.8 са показани неуправляемо и управляемо с ЛКР поведение на първия (а) и втория (б) етажи на сграда, подложена на импулсивно въздействие. Доброто подтискане на вибрациите е очевидно.



**Фигура. 4.8.** ЛКР управление при импулсно въздействие – премесвания: (а) първи етаж, (б) втори етаж.

ЛКР е синтезиран да удовлетворява специфични изисквания за ограничена грешка, за времева реакция, за устойчиви граници или определено разполагане на полюсите на затворената система. Но подходът изисква замерването на всички състояния, при неизпълнението на което атрактивните му качества се губят. Затова тук разглеждаме и  $H_2$  оптимално управление. Целевата функция за минимизиране тук е

$$J_{H_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [tr(SW_1W_1^*S^*) + tr(TW_2W_2^*T^*)] d\omega = \left\| \begin{matrix} SW_1 \\ TW_2 \end{matrix} \right\|_2^2$$

Подчертава се важноста на чувствителността  $S(j\omega)$  и на допълнителната чувствителност  $T(j\omega)$  за определен интервал от честоти в зависимост от избора на

тегловните матрици  $W_1(j\omega)$  и  $W_2(j\omega)$ . Единственото оптимално управление се описва с формулата

$$K_c = \left[ \begin{array}{c|c} A + B_2 K_2 + L_2 C_2 & -L_2 \\ \hline K_2 & 0 \end{array} \right]$$

или

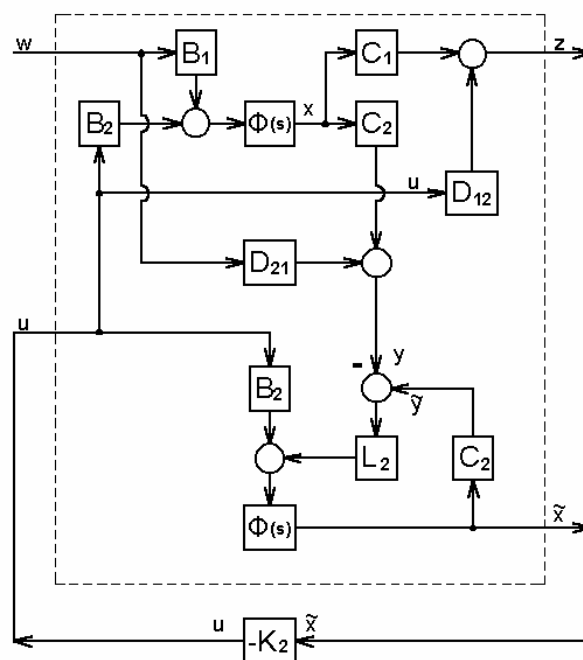
$$\dot{\tilde{x}} = (A + B_2 K_2 + L_2 C_2) \tilde{x} - L_2 y$$

$$u = K_2 \tilde{x}$$

където  $\tilde{x}$  е оценката на вектора на състоянието  $x$ . Решенията за матриците  $K_2$  на управлението и  $L_2$  на оценителя се дават с формулите

$$K_2 = -(D_{12}^* D_{12})^{-1} (B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1), \quad L_2 = -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*) (D_{21} D_{21}^*)^{-1}$$

където  $X_2$ ,  $Y_2$  са решенията на съответните алгебрични уравнения на Рикати. Блок диаграмата на системата е показана на Фиг.4.9 ( $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ ).

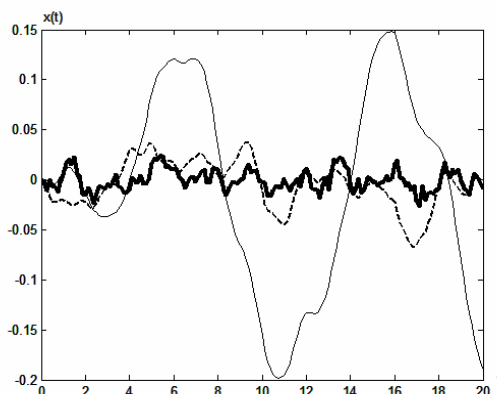


Фигура. 4.9. Разширена блок диаграма за  $H_2$  управлението.

Въведеното  $H_2$  управление взема под внимание някои неопределености и се гради на частични замервания, нещо, което е по-подходящо за практически приложения. Например, ветровете и сеизмичната активност за познати само в статистически смисъл при проектиране на сградите.

Фиг. 4.10 показва реакцията на последния етаж на осем етажна сграда. Сградата е подложена на натоварване тип бял шум, моделиращо земетресение. Свободното поведение на сградата е сравнено с управляемостта при  $H_2$  оптимален закон и ЛКР

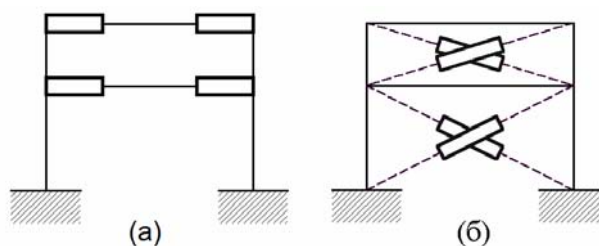
закон. В този случай,  $H_2$  подходът е по-ефикасен. Теоретически е възможно управляващите константи за  $H_2$  и ЛКР да бъдат избрани така, че ЛКР да дава по-добри резултати при симулации.



**Фигура. 4.10.** Сравнение на свободната реакция (тънка) и управляемите ЛКР (пунктир) и  $H_2$  (плътна).

**Разполагане на управляващите устройства.** За качеството на оптималното управление разполагането на управляващите устройства в сградата е много важно. Броят и комбинациите могат да бъдат много. Многоетажните сгради имат значителна коравина при динамично натоварване във вертикална посока. В хоризонтална посока те са уязвими при външни натоварвания. Затова е резонно да се изследват различни схеми за разполагане на управляващите устройства, които минимизират реакцията на сградата в хоризонтална посока. [51-52]. Разглеждайки ЛКР и  $H_2$  управления, намаляването на хоризонталните отклонения ще се разглеждат в зависимост от броя на управляващите устройства.

Разглеждаме **двуетажна сграда** (Фиг.4.11а).

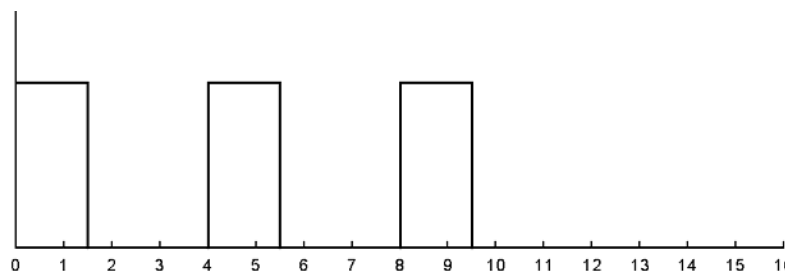


**Фигура 4.11.** Разполагане на управляващите устройства при двуетажна сграда.

Сградата е моделирана с шест двумерни крайни елемента. Вертикалните елементи на първия етаж са запънати. Всеки елемент има два възела с по три степени на свобода –вертикално и хоризонтално отмествания и завъртане. Датчиците се предполагат поставени във всеки свободен възел и замерват хоризонталните отмествания на съответния възел. Те са общо четири. Използват се до четири управляващи устройства, монтирани в хоризонтално или диагонално направления (Фиг.4.11а и 4.11б). При симулациите и изследванията са използвани два вида натоварване.:

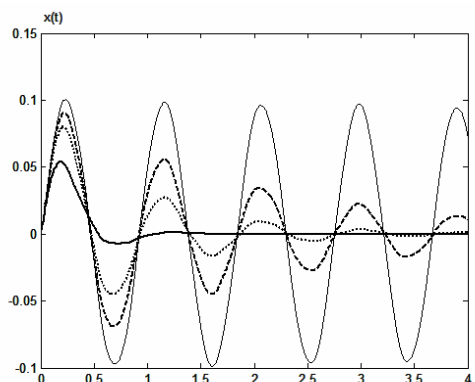
(1) Моментна хоризонтална постоянна сила, приложена във всеки свободен възел на сградата, симулираща земетресение;

(2) Периодична импулсивна хоризонтална сила, действаща в общите възли на първия и втория етажи, симулираща силен вятър (фиг. 4.12).



**Фигура. 4.5.** Периодично импулсивно натоварване, моделиращо вятър.

Като резултат се получава отворената система. Прилагайки ЛКР управлението се получава затворената система. Ответната реакция на затворената система се сравнява с тази на отворената система по отношение на намаляване на максималното хоризонтално отклонение.



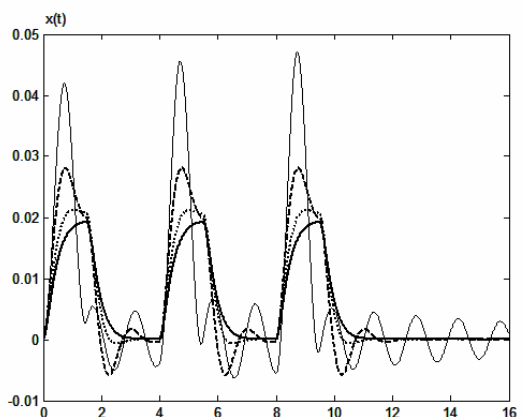
**Фигура 4.13.** Влияние на тегловните функции при ЛКР управлението: неуправлявана система (тънка), управлявани  $q = 300$  (пунктир),  $q = 1500$  (точкова) и  $q = 15000$  (точки с пунктир)

Нека отначало предположим, че всички състояния могат да участват в обратната връзка. Факторът  $Q$  в (4.49) измираме във вида  $qI$ , където  $q$  е положителна константа и  $I_{2n \times 2n}$  е единична матрица. Предполагаме  $R = I_m \times_m$  и  $S = 0$ .

Отначало се разглежда важността на тегловната константа  $q$  на ЛКР за качеството. Разглежда се строителна структура, снабдена с четири хоризонтални управляващи устройства (Фиг.4.11а) под въздействието на сеизмично натоварване (1). Фиг.4.13 показва хоризонталното отклонение на втория етаж на сградата. Сравнява се ответната реакция на неуправляваната и на управляваната системи за фактора  $q = 300, 1500, 15000$ . Максималното отклонение се редуцира съответно с 15.23, 27.06 и 50.35%. Следователно, избирайки подходяща стойност за фактора  $q$ , може значително да се редуцира пикът на отклонението. По-нататък, увеличаването на стойността на  $q$  не води до съществено подобряване на подтискането на вибрациите.

Нека изследваме важността на броя на управляващите устройства, монтирани в сградата. Както може да се предположи, потискането на вибрациите е по-добро, когато структурата е снабдена с повече управляващи устройства. При все това следва

да се определи местоположението на управляващите устройства (хоризонтално, диагонално). Пример е сграда с хоризонтално разположени управляващи устройства (Фиг.4.11a) под въздействие на силен вятър (2). Тегловният ЛКР фактор  $q$  е равен на 150000. Фиг.4.14 показва сравнение на хоризонталното отместване на втория етаж на неуправляваната структура и на управлявана структура с четири, два и един управляващи устройства. Максималното хоризонтално отклонение се редуцира съответно с 59.02, 55.20, 40.34 %.



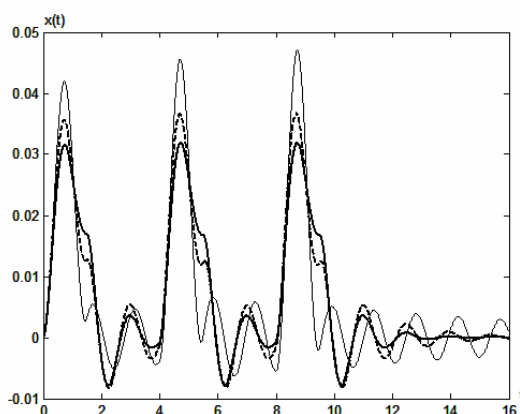
**Фигура 4.14..** Влияние на броя на управляващите устройства при ЛКР управление: неуправлявана структура (тънка), управлявана структура с четири (плътна), два (точкова) и един (пунктир) управляващи устройства

Разглежда се също и важноста на начина, по който е монтирано управляващото устройство. Сравнявайки ответната реакция на структура с четири хоризонтални и четири диагонални управляващи устройства, подложена на земетресение или вятър, се забелязва, че тя е практически идентична (36.75% за хоризонталните срещу 35.55% за диагоналните). Ако броят на управляващите устройства е две или едно, по добро потискане на вибрациите се получава при хоризонтално разположените управляващи устройства. Като пример е разгледана двуетажна сграда с две управляващи устройства (хоризонтални и диагонални), подложена на вятър (2). Факторът  $q$  при състоянията е равен на 15000. Фиг.4.15 показва сравнение на хоризонталното отклонение на втория етаж за неуправляема, управляема с хоризонтални и управляема с диагонални управляващи устройства система. Поведението е подобно. Пиковите на вибрациите се потискат по-добри при хоризонталните управляващи устройства. Максималното хоризонтално отклонение се намалява съответно с 29.56 и 19.44%.

По нататък разглеждаме осеметажна сграда (Фиг.4.16a). За нея е създаден двумерен МКЕ модел – рамка с 22 елемента и 16 възела. Вертикалните елементи. Сензорите са разположени във възлите на първия, третия, петия и седмия етаж на сградата и замерват отместванията на съответните възли. Разглеждаме четири различни схеми на разполагане на управляващите устройства като всяка от тях съдържа по четири устройства (Фиг.4.16).

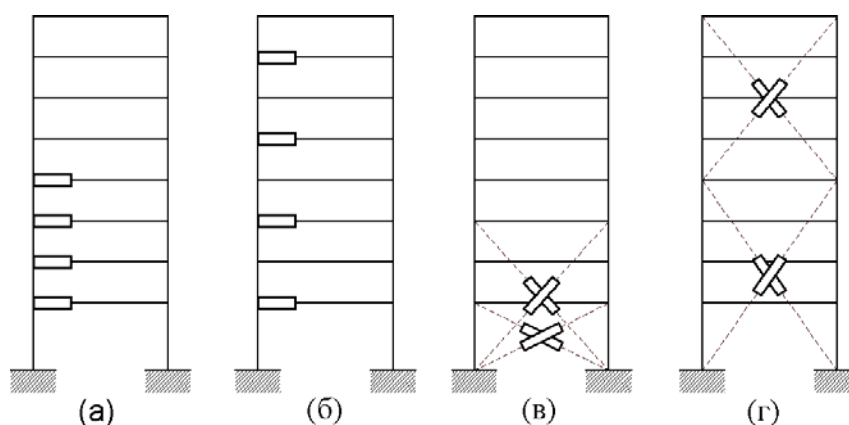
Прилагат се два вида динамично натоварване:

(3) Случаен процес тип бял шум с математическо очакване нула и дисперсия 4000, модел на земетресение, действащ едностранно във всички общи възли.



**Фигура. 4.15.** Сравнение на неуправявана (тънка), хоризонтални (плътна) и диагонални (пунктир) управляващи устройства

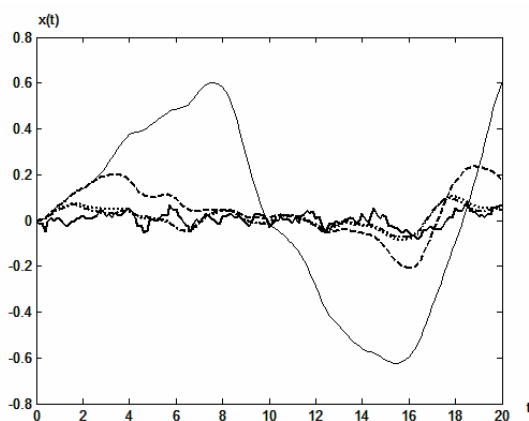
(4) Периодично синусоидално хоризонтално едностранно натоварване на всяка връзка, моделиращо вятър. Подобно налягане съответства на вятър със скорост 20 m/sec, порив 2.504, плътност на въздуха  $0.125 \text{ N/m}^2$ , и фактор 1 [53].



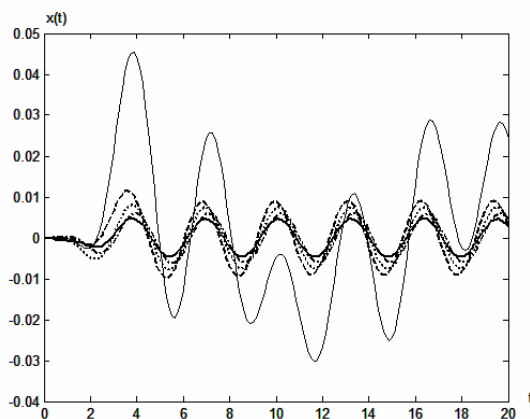
**Фигура 4.16.** Разполагане на 4 управляващи устройства в осеметажна страда.

Използва се  $H_2$  оптимално управление. Сравнява се реакцията на отворената и затворената системи на основата на намаляването на максималното хоризонтално отклонение.

Резултатите демонстрират ефективността на предложеното  $H_2$  оптимално управление и важността на разполагането на управляващите устройствa. Фиг. 4.17 показва хоризонталното отклонение на осмия етаж на сградата при земетресение (3) за четирите схеми на разполагане на управляващите устройства. Отчитаме, че схеми (б), (в), и (г) са по-ефективни от схема (а). При схеми (б) и (в) намаляването на реакцията е приблизително еднакво. Потискането на вибрациите при схема (г) е незначително по-добро от това при схеми (б) и (в). Максималното хоризонтално отместване се редуцира съответно с 72.62, 88.94, 90.9 и 90.81% за схеми (а), (б), (в) и (г).



**Фигура. 4.17.** Сравнение на четирите схеми за управляващите устройства при  $H_2$  управление и при земетресение: (а) пунктир, (б) точкова, (в) точки с пунктир, (г) плътна и неуправлявана - тънка.



**Фигура. 4.18.** Сравнение на четирите разположения на управляващите устройства при  $H_2$  управление и натоварване – вятър: неуправлявана – тънка, (а) пунктир, (б) точкова, (в) точки с пунктир, (г) плътна.

Хоризонталното отместване на върха на осеметажната строителна структура подложена на вятър (4) е представена на Фиг.4.18. Пиковите на вибрационните отклонения при схеми (а), (б), (в), и (г) се редуцират с увеличаваща се ефективност. Схема (г) успокоява реакцията най-ефективно. Максималното хоризонтално отклонение на последния етаж се намалява съответно с 88.75, 93.29, 96.07 и 96.18%. Симулациите показват, че вредните вибрации за осеметажна сграда, регулирани с  $H_2$  управление и диагонално разположени управляващи устройства, обхващащи всичките осем етажа, се потискат най ефективно.

#### 4.5.3. Оптимално управление на сгради при сеизмична активност

Вибрацията на високи сгради по време на земетресения и силни ветрове нарушава комфорта на обитателите и води до повреди и дори разрушения на самата сграда и на оборудването в нея. Затова намаляването на вибрациите на строителните структури представлява значителен интерес. Динамичната реакция на линейна еластична

структура зависи от масата и еластичните ѝ свойства. Нов подход тук е добавянето на управляващо устройство, което може да модифицира вътрешните напрежения, масата или дъмпинга на структурата и може да поддържа реакцията в определени граници [54].

Ефективен подход тук е теорията на оптималното управление. Всяка управляема структура следва да има свой алгоритъм за оптимално управление, адаптиран към нейните характеристики и възможните външни влияния. Законът за оптимално управление може да бъде избран по различен начин. ЛКР управлението е една от мощните техники в теорията на управлението и е широко използвана при управлението на структури. Линейността на това управление и теоретически получените му характеристики са основанието за този избор [55].

В този параграф разглеждаме три целеви функционала на основата на линейно квадратична оптимизация за активно управление динамиката на многоетажна сграда при сеизмична активност. Този подход води до линейно управление, което се анализира и изпълнява лесно. Първият критерий е ЛКР управление, което използва интегрален критерий с безкраен хоризонт, който определя баланса между реакцията на структурата и управляващата енергия и води до управление, пропорционално на реакцията. Вторият критерий е не интегрален дискретен във времето целеви функционал, в който оптималността се постига във всеки момент време, и води до оптимално управление, пропорционално на стъпката по времето и на реакцията на структурата. Третият критерий е обобщено ЛКР управление, което обобщава идеите на първия и втория критерии. Изучава се максималната реакция на структурата и максималните стойности на активното управление в зависимост параметрите на синтеза на управлението. Разглежда се влиянието на нарастването на времето върху алгоритъма. Ефективността на предложените алгоритми за намаляване на структурната реакция при земетресения се демонстрира с компютърна симулация на конкретни числени примери.

Разглеждаме двумерен динамичен модел на линейна структура с  $n$  степени на свобода, подложена на моментно външно натоварване и с активно управление. Уравненията на движение са

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = Hu(t) + F(t) \quad (4.50)$$

където  $X(t)$  е  $n \times 1$  векторът на състоянието,  $u(t)$   $m \times 1$  векторът на управлението,  $M$  е  $n \times n$  матрицата на масата,  $K$  е  $n \times n$  матрицата на коравината.  $C$  е  $n \times n$  матрицата на дъмпинга, която се приема линейна комбинация на матриците на масата и коравината.  $H$  е  $n \times m$  матрица, определяща разположението на управляващите входове.  $F(t)$  е външното натоварване. За целите на синтеза на управление, ур. (4.50) може да се препише като система диференциални уравнения от първи ред в пространството на състоянията.

$$\dot{x} = Ax + Bu + DF \quad (4.51)$$

където  $x(t) = [X(t) \ \dot{X}(t)]^T$  е  $2n \times 1$  векторът на състоянията,  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$  е  $2n \times 2n$  матрицата на динамичната система,  $B = [0 \ M^{-1}H]^T$  е  $2n \times m$  матрицата на

управляващите входове,  $D = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \end{bmatrix}^T$  е матрицата на външните смущения. Началните условия приемаме нулеви

$$x(0) = 0 \quad u(0) = 0 \quad F(0) = 0 \quad (4.52)$$

Ур. (4.51) не може да се реши директно, защото неизвестните са  $(2n+m)$  на брой, а уравненията са само  $2n$ , т.е.  $2n$  състояния и  $m$  управления. Нужни са ни още  $m$  уравнения. Разглеждаме ур. (4.51) предполагайки, че е намерено оптимално управление  $u^*(t)$  и външните смущения  $F(t)$  са измерени. Реакцията на структурата  $x(t)$  може да бъде намерена аналитично, като се използва модален подход. Да изразим векторът на състоянието по следния начин:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Tz}(t) \quad (4.53)$$

където  $T$  е  $2n \times 2n$  матрица, съставена от собствените вектори на матрицата  $A$ . съответното модално уравнение за състоянията е

$$\dot{z}(t) = \Pi z(t) + \Psi(t) \quad (4.54)$$

$$\Pi = T^{-1}AT \quad \Psi(t) = T^{-1}Bu^*(t) + T^{-1}DF(t)$$

Началните условия в случая са

$$z(0) = 0 \quad u(t) = 0 \quad F(0) = 0 \quad (4.55)$$

Решението на ур. (3.48) се получава със следния интеграл

$$z(t) = \int_0^t \exp(\Pi(t-\tau))\Psi(\tau)d\tau \quad (4.56)$$

Използвайки началните условия (4.55), ур. (4.56) може да се реши числено

Ще определим векторът на управлението  $u^*(t)$  така, че да удовлетворява ур. (4.54) и да бъде подчинен на известен целеви функционал.

Първият алгоритъм е **линеен квадратичен алгоритъм ЛКР**, който дава управление, пропорционално на състоянията, удовлетворяващо ур. (3.45) и целевият функционал се дава с интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Rx(t)]dt \quad (4.57)$$

Тук  $t_0$  е началното, а  $t_f$  е крайният момент време. В ур. (4.57) двете граници на интеграла се определят от следните условия:

$$x(t_0) = 0 \quad x(t_f) = 0 \quad u(t_0) = 0 \quad u(t_f) = 0 \quad (4.58)$$

$Q$  е  $2n \times 2n$  положително полуопределена матрица, а  $R$  е  $m \times m$  положително определена матрица. Целевият функционал представлява баланс между структурната реакция и енергията на управлението. Матриците  $Q$  и  $R$  са главните параметри при този алгоритъм. При много големи стойности на  $R$  спрямо  $Q$ , енергията на управлението е малка. Това физически се изразява в п-малки мотори, управляващи устройства и усилватели, които да изпълняват закона на управление. Когато  $Q$  е значително по-

голямо спрямо  $R$ , ответната реакция на структурата е малка, което дава силно дампирана система и големи разходи на управляваща енергия.

Предполагаме, че системата (4.51) е управляема и наблюдаема (това е случаят с високи здания). Решението на оптимизационната задача (4.51) и (4.57) се получава чрез вариационното смятане с принципа на Понтрягин. Разглеждаме случая на безкраен хоризонт на оптимизация, т.е. интервалът  $[t_0, t_f]$  е достатъчно голям. Оптималното управление се дава с израза

$$u^* = -R^{-1} B^T P x(t) \quad (4.59)$$

където  $P$  е решението на следното алгебрично уравнение на Рикати

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (4.60)$$

Матрицата на управлението

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4.61)$$

не зависи от времето, а само от системните матрици  $A$  и  $B$  и от избора на матриците  $Q$  и  $R$ . Ще припомним, че ЛКР управлението изисква измерването на целия вектор на състоянието, т.е. изисква  $2n$  на брой датчика. Това управление има добри свойства на обратната връзка, т.е. добро отхвърляне на смущенията и добро следене [56].

Вторият подход, който ще разгледаме тук, ще наречем **дискретизиран ЛКР закон**. Нека предположим, че интервалът време  $[t_0, t_f]$  е разделен на подинтервали  $[t_{i-1}, t_i]$  с дължина  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) и вместо интегралния критерий за минимизиране (4.57) върху целия интервал време, да решим оптималната задача последователно за всеки подинтервал [57–59]. Това води до синтез на поинтервално оптимално управление, което означава, че оптималността се постига във всеки момент време.

За целевата функция отново може да се избере квадратична функция на състоянията и управляващите сили, която не е в интегрална форма. Оптималното управление  $u^*(t)$  може да бъде получено от следния моментен неинтегрален критерий, който зависи от времето

$$J_p(t) = x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \quad (4.62)$$

и удовлетворява ур. (4.51). Така  $J_p(t)$  се минимизира във всеки момент време  $t_i$  от интервала  $[t_0, t_f]$ . Стъпката по времето  $\Delta t$  се избира според конкретната ситуация.

Векторът на оптималното управление се получава във вида:

$$u^*(t) = -\frac{\Delta t}{2} R^{-1} B Q x(t) \quad (4.63)$$

и е пропорционален и на стъпката  $\Delta t$  по времето и на измерванията на реакцията на структурата  $x(t)$ . Този алгоритъм е по същество дискретен ЛКР, зависещ от времето.

Нека сега разширим идеята за дискретизация на времето по интервали, но изберем интегрална форма на целевата функция за всеки подинтервал [60]. Този подход ще наречем **обобщен ЛКР закон**. Тук поне едно от двете гранични условия при интегрирането в подинтервала трябва да бъде вече напълно определено. За тази цел избираме целеви функционал във всеки подинтервал  $[t_{i-1}, t_i]$

$$J_i = x^T(t_i)Sx(t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (4.64)$$

където  $S$  е of  $2n \times 2n$  положително полуопределена матрица. Тук събираемото  $x^T(t_i)Sx(t_i)$  служи за оптимизиране на граничното условие в момента време  $t_i$ . Ще забележим, че второто събираемо в ур. (4.64) е точно критерият в ур. (4.65).

За да се получи оптималният вектор на състоянието  $x(t)$  и оптималното управление  $u^*(t)$  за целия интервал  $[t_0, t_f]$ , трябва да се минимизира следният обобщен целеви критерий:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n \{x^T(t)Sx(t) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt\} \quad (4.65)$$

Предполагайки, че системата (4.51) е управляема и наблюдаема, решенията на оптимизационната задача (4.51) и (4.65) и подобно на оптимизационната задача (4.51) и (4.59) се получават с вариационен подход и оптималното управление е вектор в следния вид/

$$u^*(t) = Gx(t) \quad (4.66)$$

където матрицата на обратната връзка  $G$

$$G = -R^{-1}B^T S \quad (4.67)$$

Не зависи от момента време  $t_i$ , от стъпката по времето  $\Delta t$ , а само от константа, определена само чрез матриците  $A$  и  $B$  на системата и от тегловните матрици  $Q$ ,  $R$  и  $S$ . Стъпката по времето  $\Delta t$  може да се променя по време на пресмятанята в зависимост от желаната точност. Ако матрицата  $S$  е избрана като решение на алгебричното уравнение на Рикати (4.60), то управляващата матрица (4.67) става идентична на решението на стандартната ЛКР задача в ур. (4.59). По такъв начин ЛКР алгоритъма може да се види като частно решение на обобщения ЛКР алгоритъм.

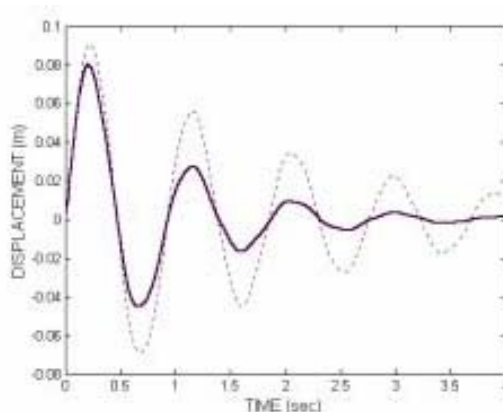
Както се вижда от ур. (4.65) и (4.66), оптималното решение на обобщения ЛКР алгоритъм зависи от избора на матриците  $R$  и  $S$ . Няма правила, по които да бъдат избрани тези матрици. Едно опростено предположение може да бъде диагоналните форми на матриците  $R$  и  $S$  както и еднаквата стойност на елементите по диагонала в матриците.

**Числени резултати.** Многоетажните сгради имат значителна коравина и така значително издръжливост на динамични натоварвания във вертикална посока. В хоризонтална посока тези структури са податливи на външни влияния (земетресения, силни ветрове). Затова е резонно предложените по-горе стратегии за управление да бъдат приложени към поведението на структурата в хоризонтална посока [61].

За компютърни симулации се използва моделът (4.51) и (4.52) за осем етажна сграда, за да се покажат резултатите на предложените ЛКР и обобщен ЛКР стратегии за оптимално управление. Две активни управляващи устройства са поставени на първия и втория етажи. За анализ на динамиката във времето, структурата се натоварва с моментна хоризонтална константна сила, приложена във всеки неин подвижен възел. Оптималните тегловни матрици  $Q$  и  $S$  на ЛКР и обобщеното ЛКР управление се

предполагат диагонални. Матрицата  $R = I_{m \times m}$  се предполага единична и тегловната матрица  $Q = qI_{2n \times 2n}$ . Коефициентът  $q = 1.5 \times 10^5$ , и тегловната матрица  $S = sI_{2n \times 2n}$ , където  $s = 3 \times 10^4$ .

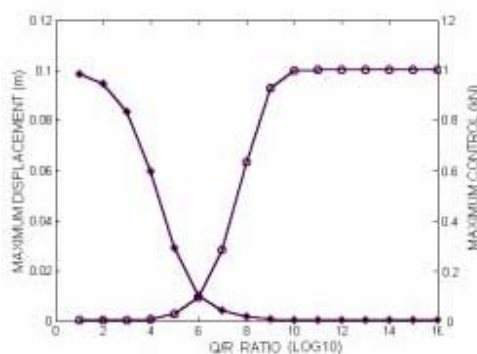
При изследванията за обобщения ЛКР алгоритъм се оказва, че отместванията в структурата и оптималното управление не зависят от избора на стъпката по времето  $\Delta t$ . С други думи, този подход не е чувствителен от времевата стъпка. За инженерната практика нечувствителността на обобщения ЛКР алгоритъм към стъпката по времето е добро качество. За разлика от него, при дискретния ЛКР алгоритъм с целева функция (4.62) и векторът на оптималното управление (ур. (4.63)) и ответната реакция на структурата се променят значително, когато стъпката по времето се изменя.



**Фигура 4.19.** Ефектът на ЛКР (пунктир) и обобщения ЛКР (плътна) алгоритъм за управление

Ответната реакция на системата със затворена ЛКР верига е сравнена със системата със затворена обобщена ЛКР верига по отношение на редуцирането на максималното хоризонтално отклонение на преместването на най-високия етаж. Обобщеният ЛКР подход дава по-добри резултати при максималното редуциране на пиковете и по отношение на времето за затихване на вибрациите в сравнение с ЛКР подхода при едни и същи параметри на синтез (Фиг.4.19).

Допълнително са разгледани зависимостите между максималната реакция на структурата и максималната сила на активното управление в зависимост от параметрите на синтеза матриците  $Q$  и  $R$ . Изследва се, че максималната реакция на структурата и максималната сила на управлението се променят в зависимост от тези параметри (Фиг.4.20). Максималното хоризонтално отместване на най-високия етаж на сградата (линията със звезди) намалява с нарастването на отношението на тегловните параметри  $Q$  и  $R$ . В същото време максималната управляваща сила (линията с кръгчета) се увеличава с нарастването на отношението на тегловните параметри. Формата на кривите е подобна за ЛКР и обобщения ЛКР алгоритми. Числените проверки сочат, че интегралният критерий ур. (4.57) продължава да расте, когато отношението  $Q/R$  нараства, докато интегралният критерий в ур. (4.65) за обобщения ЛКР подход той отначало намалява, достигайки минимална стойност, и след това нараства. Стойността на отношението  $Q/R$ , където се достига този минимум, може да се приеме като най-добро за разглежданата сграда.



**Фигура 4.20.** Отношения между максималното управление (звезди) и максималната управляваща сила (кръгчета) от една страна и отношението  $Q/R$ .

#### 4.5.4. ЛКГ и полуактивно управление на комплекс от сгради

В литературата се среща активно и полуактивно управление на група от две сгради, но като правило те имат еднаква височина [62]. Главно се предлага ЛКР управление в тези изследвания. Известно е, че ЛКР управлението изисква много датчици, за да осигури пълна информация за състоянията на комплекса от сгради. Той също е значително по-чувствителен към чувствителността на математическия модел и правилния избор на тегловни матрици за целевата функция. Вместо глобално квадратично управление, може да се използва локално управление по обратна връзка, но тази възможност е слабо изследвана [63]. Една заслуга на локалното управление по обратна връзка е, че се използват малко сензори. Ефективността на качеството на управлението следва да се изследва за всяко конкретно приложение, защото локалната обратна връзка е със сигурност ограничително в сравнение с глобалната.

Разглежда се и локално и глобално управление по обратна връзка с триене за комплекс от сгради за смекчаване на сеизмичната реакция [64]. Предлага се глобален закон на управление по обратна връзка на основата на ЛКГ алгоритъма, който да използва ефективно триенето. Предлагат се и локални управления, които включват елементи на вискозност и на триене. Направени са числени експерименти, за да демонстрират ефективността на изучаваната полуактивна управлявана структура. Изследва се качеството на всяко управление за сградите при едно или повече устройства с триене при различна сеизмична активност на основата на комплекса сгради по отношение на отместванията и ускоренията.

Разглеждаме модел на комплекс от сгради

$$M\ddot{x}(t) = C\dot{x}(t) + Kx(t) + Hu(t) - G\ddot{x}_g(t) \quad (4.68)$$

и модел на дъмпинг с триене даващ управляващата сила.

$$u_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & \text{ако } |f_k(t)| \leq |f_{dk}(t)| \\ f_{dk}(t), & \text{ако } |f_k(t)| > |f_{dk}(t)| \end{cases} \quad (4.66)$$

където  $f_k(t) = k_{dk} x_k^{rel}(t)$  е еластичната сила, а  $f_d = [f_{d1}, f_{d2}, \dots, f_{dP}]^T$  е векторът на полуактивната сила на триене и  $K_d = \text{diag}[f_{d1}, f_{d2}, \dots, f_{dP}]$  е  $P \times P$  диагонална матрица на коравината на пружината.  $x_k^{rel}(t)$  е относителното преместване между двете сгради за  $k$ -тия дъмпинг. Силите на полуактивното триене общо могат да се представят с

$$f_{dk}(t) = \mu N_k(t) \text{sgn}[\dot{x}_k^{rel}(t)]. \quad (4.69)$$

Силата на притискане  $N_k(t) \geq 0$  се определя от управлението по обратна връзка. Ако плъзгачът се движи непрекъснато, полуактивната управляваща сила  $u(t)$  е равна на силата на триене  $f_d(t)$ , която при компютърните пресмятания се обновява на всяка стъпка по времето според показанията на управлението по обратна връзка. Дъмпингът с триене може да спре да се движи, ако управляващата сила стане по-голяма от  $f(t)$ .

**Глобално управление по обратна връзка.** Линейно квадратично гаусово ЛКГ управление е избрано за управление по обратна връзка по изход на цялата система. Ако  $z_c = [x, \dot{x}]^T$  е векторът на състоянието на комплекса сгради, ур. (4.66) се записва в стандартна форма в пространството на състоянията като (ур. (4.23), § 4.2.3)

$$\dot{z}_c = A_c z_c + B_c u + E_c \ddot{x}_g \quad (4.70)$$

$$y_e = C_e z_c + D_e u \quad (4.71)$$

$$y_m = C_m z_c + F_m \ddot{x}_g \quad (4.72)$$

където

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}H \end{bmatrix}, E_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}G \end{bmatrix}$$

където  $y_e, y_m$  са векторите на управляваните и замерваните състояния. За управляваните състояния  $y_e$  са избрани абсолютните ускорения на избрани етажи.

ЛКГ управлението е избрано така, че да регулира по абсолютните ускорения на двете сгради и по всички управляващи сили. Целевата функция е (4.30)

$$\hat{J} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} E \left[ \int_0^\tau \{y_e^T Q y_e + u^T R u\} dt \right] \rightarrow \min \quad (4.73)$$

където  $R$  и  $Q$  са тегловните матрици, избрани евристично. Оптималната управляваща сила се дава с (ур. (4.31) и (4.32))

$$u = -K_c \hat{z}_c \quad (4.74)$$

където  $\hat{z}_c$  е векторът на оцененото състояние на сградите, а  $K_c$  е коефициентът-матрица на оптималното ЛКГ управление.

Така посоченото управление работи в случая, когато плъзгачът на дампера се движи. Затова за полуактивното управление желаната притискаща сила се определя с формулата

$$N_k(t) = \begin{cases} \frac{u_k^{LQG}(t)}{\mu}, & \text{ако } u_k^{LQG}(t) \cdot \dot{x}_k^{rel}(t) < 0 \\ 0, & \text{ако } u_k^{LQG}(t) \cdot \dot{x}_k^{rel}(t) \geq 0 \end{cases} \quad (4.75)$$

Силата на полуактивното управление се определя, като ур. (4.75) се замести в ур. (4.69). Управляващата сила  $u_k(t)$  ур. (4.70) се определя след като се намерят моментните състояния на плъзгачаг..

**Локално управление по обратна връзка.** За да се разбере по-добре смислеността на локалното управление, нека разгледаме функцията на Ляпунов  $V$  и нейната първа производна  $\dot{V}$  в термините на ур. (4.70).

$$V = \frac{1}{2} z_c^T Q_c z_c \quad (4.76)$$

$$\dot{V} = z_c^T Q_c \dot{z}_c = z_c^T Q_c A_c z_c + z_c^T Q_c E_c \ddot{x}_g + z_c^T Q_c B_c u \quad (4.77)$$

където матрицата  $Q_c = \text{diag}[K, M]$ . Заместваме ур. (4.77) в ур. (4.69) без външните смущения и получаваме

$$\dot{V} = -\dot{x}^T C \dot{x} - \sum_{k=1}^P \mu \cdot N_k(x_k^{rel}, \dot{x}_k^{rel}) \cdot \dot{x}_k^{rel} \cdot \text{sgn}[\dot{x}_k^{rel}] \quad (4.78)$$

От ур. (4.78) е ясно, че управление от локално движение дава положителен дампинг и осигурява асимптотична устойчивост на структурата според теорията на Ляпунов. Скоростта  $\dot{V}$  може да променя знака си в зависимост от плъзгащата сила  $N_k(x_k^{rel}, \dot{x}_k^{rel})$ . Това може да се случва, ако плъзгача не спира да се движи, защото в противен случай второто събираемо в ур. (4.78) става нула. Това може да се приеме като критерий за локални управления по обратна връзка за променлив дъмпинг.

**Управление с вискозно и на Рейд триене (ВРТ)** е един вид локално управление, което се разглежда в този параграф. Управляващата притискаща сила  $N_k(t)$  се дава с израза:

$$N_k(t) = N_k(x_k^{rel}, \dot{x}_k^{rel}) = e_k |x_k^{rel}| + g_k |\dot{x}_k^{rel}| \quad (4.79)$$

където  $e_k$  и  $g_k$  са положителни коефициенти за  $k$ -тия дъмпинг. Това управление комбинира чертите на вискозен дампинг и на нелинеен Рейд дъмпинг. За това управление за оптимална дисипация на енергията се избира отношението  $e_k/g_k = 2\omega_1/\pi$ , в което  $\omega_1$  е първата натурална честота на неуправляемата структура. Предимството на това управление е, че управляващата сила отговаря и за плъзгането и за скоростта на плъзгане. Но при все това е възможно спиране на плъзгача, ако константите  $e_k$  и  $g_k$  са твърде големи или ако вибрациите на структурата са малки поради слаби смущения на движението.

**Модулирано хомогенно управление с триене (МХТ).** Това е друго локално управление, предлагано в този параграф, което е подходящо за променлив дъмпинг с

триене. Управляемата притискаща сила  $N_k(t)$  в текущия момент е пропорционална на абсолютната стойност на локалния пик на дъмпинг деформацията в предишния момент и математически се изразява като

$$N_k(t) = N_k(x_k^{rel}) = \beta_k \cdot |P[x_k^{rel}(t)]| \quad (4.80)$$

където  $\beta_k$  е положителен коефициент и  $P[x_k^{rel}(t)]$  е локалният максимум или минимум в момента, предхождащ текущия момент, и се дефинира с формулата

$$P[x_k^{rel}(t)] = x_k^{rel}(t - s) \quad (4.81)$$

където  $s$  е стъпката по времето и  $t$  е текущият момент. Ефектът от управлението е подобър, когато се добави  $\tanh[\alpha_k \dot{x}_k^{rel}(t)]$  в ур. (4.80)

$$N_k(t) = N_k(x_k^{rel}, \dot{x}_k^{rel}) = \beta_k |P[x_k^{rel}(t) \cdot \tanh[\alpha_k \dot{x}_k^{rel}(t)]| \quad (4.82)$$

където  $\alpha_k$  е коефициентът на скоростта на управлението, който определя областта, в която силата на триенето клони към нула. Когато  $\alpha_k$  е малко, тази област се разширява.

**Управление без преустановяване на триенето (БПТ)** също може да бъде подходящо локално регулиране. При него управляващата притискаща сила се дава с израза

$$N_k(t) = N_k(\dot{x}_k^{rel}) = N_k^{rel} \cdot |\tanh[\gamma_k \dot{x}_k^{rel}(t)]| \quad (4.83)$$

където коефициентът на скоростта на управлението  $\gamma_k$  има същият физически смисъл какъвто и  $\alpha_k$  в МХТ управлението и  $N_k^{max}$  е максималната притискаща сила.

Този алгоритъм на управление води силата на триене до максималната ѝ стойност като при това запазва непрекъснатото движение на плъзгача. Параметърът  $N_k^{max}$  дава точна горна граница за управляващата сила и по този начин на капацитета на дъмпинга. Тъй като големината на управляващата сила зависи от нивото на вибрация на комплекса от сгради, синтезът на дъмпинга при МХТ и БПТ може да се окаже не много сигурен.

**Оценяване на предложените закони за управление.** Разгледаният комплекс от сгради се състои от четириетажна и двуетажна сгради. Масите на етажите и коравините са еднакви. Параметрите на сградите са представени в Таблица 4.1. Коравината  $k_d$  на дъмпинга е равна на коравината на четириетажната сграда. Дъмпингът при числените експерименти е по-малък от половината на по-малкия от дъмпинга на двете сгради.

Земетресението се моделира с бял шум ( $PGA = 2.25 \text{ m/s}^2$ ) при сравнителния анализ. Използвани са нормализирани индекси, оценяващи качеството на редуцирането на реакцията на сградите. Те се основават на пика и на средно квадратичното отклонение на отношението на междуетажните отклонения, както и на абсолютната реакция на ускоренията ( $J_2$  и  $J_4$ ) на двете сгради

**Таблица 4.1.** Параметри на сградите в комплекса

Сграда	Маса (10 <sup>5</sup> kg)	Коравин а (10 <sup>8</sup> N/m)	Натурална честота (Hz)			
			1-ви	2-ри	3-ти	4-ти
4-етажа	2	8.5	0.26	2.19	5.13	7.73
2-етажа	4	8.75	0.69	4.73	-	-

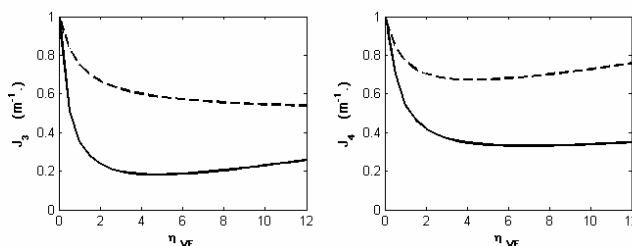
$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{\max_{t,i} |d_i(t)|}{\max_{t,i} |d_i^{UCS}(t)|}, & J_2 &= \frac{\max_{t,i} |\ddot{x}_i(t)|}{\max_{t,i} |\ddot{x}_i^{UCS}(t)|}, \\
 J_3 &= \frac{\max_{t,i} \|d_i(t)\|}{\max_{t,i} \|d_i^{UCS}(t)\|}, & J_4 &= \frac{\max_{t,i} \|\ddot{x}_i(t)\|}{\max_{t,i} \|\ddot{x}_i^{UCS}(t)\|}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Индексът  $i$  се отнася до съответния етаж, а индексът “UCS” определя реакцията на неуправляемата система от сгради.  $i$

Съответните коефициенти на локалните управления ВРТ, МХТ и БПТ са оценени с нормализиран фактор  $\eta$

$$\eta_{VHF} = \frac{e_k}{W_{ave}}, \quad \eta_{MHF} = \frac{\beta_k}{W_{ave}}, \quad \eta_{NSF} = \frac{\mu N_k^{\max}}{W_{ave}} \tag{4.85}$$

където  $W_{ave}$  е осредненото тегло на четириетажната сграда. Намалването на реакцията за комплекса от сгради за различни стойности на коефициентите на ВРТ управление е показан на Фиг.4.21.



**Фигура 4.21.** Фактори за коефициентите на ВРТ управлението за двуетажната (точкова) и четириетажната (плътна) сгради

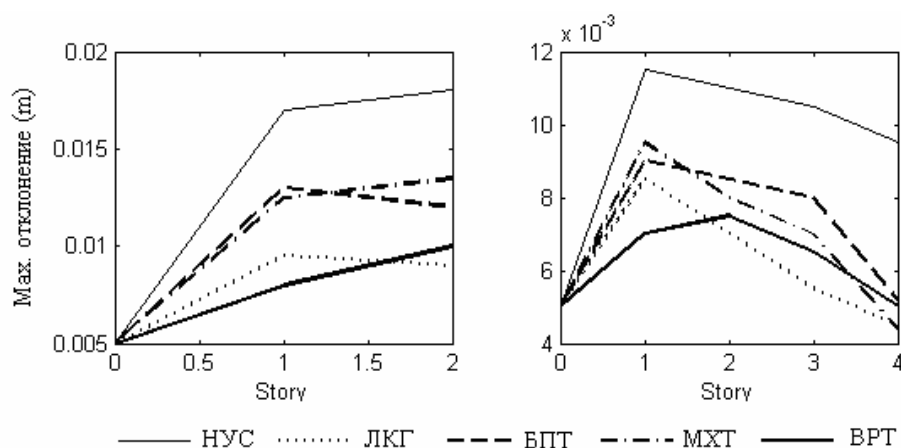
Трите локални стратегии за управление могат да поддържат добре оптимално редуциране на реакцията на сградата при широк обхват на техните коефициенти. Редуцирането на реакцията на двуетажната сграда не е голямо, когато нормализираните фактори на коефициентите са извън определени стойности. По-значителни са резултатите при ускоренията на четириетажната сграда. При фактори  $\eta_{VHF} = 5$ ,  $\eta_{MHF} = 15$ ,  $\eta_{NSF} = 1$  и коефициенти за скоростта  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 5$  for МХТ и БПТ управленията сравнителни данни са дадени в Таблица 4.2.

**Таблица 4.2.** Индекси за качество за управленията

Сгради	Индекси	Локални управления			Глобално управление
		ВРТ	МХТ	БПТ	ЛКГ
Четири-етажна	J <sub>1</sub>	0.69	0.67	0.73	0.78
	J <sub>2</sub>	0.94	0.95	0.96	0.81
	J <sub>3</sub>	0.58	0.53	0.60	0.71
	J <sub>4</sub>	0.73	0.68	0.72	0.71
Дву-етажна	J <sub>1</sub>	0.42	0.48	0.43	0.61
	J <sub>2</sub>	0.55	0.62	0.54	0.57
	J <sub>3</sub>	0.43	0.46	0.42	0.49
	J <sub>4</sub>	0.38	0.39	0.35	0.43

За разглеждания комплекс от сгради и трите локални управления показват сходна ефективност.

Когато работят двата дъм핑а на първи и втори етажи, са необходими по малки стойности на фактора на константите. Това означава, че се ползва по-малък техен капацитет за същото качество на управлението отколкото, когато работи само един дъмпинг.



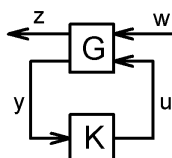
**Фигура 4.22:** Редуциране на пика на междуетажните отклонения за двете сгради с четирите закона на управление

Глобалното ЛКГ управление измерва абсолютните ускорения на всички етажи на сградите за обратна връзка. Към управлението се връща ускорението на горния етаж на двуетажната сграда. Ограниченията и предимствата на локалните управления се определят чрез пресмятане на ответната реакция при локалните и глобалната стратегии на управление. На Фиг.4.22 е дадено сравнение на редуцираните пикове на реакцията на междуетажните премествания на двете сгради при четирите вида управления. Локалните управления редуцират пика средно с 15%–20% по-слабо отколкото ЛКГ управлението. Те целят намаляването на моментната механична енергия на комплекса от сгради. Глобалното ЛКГ управление позволява да бъде

минимизира ответната реакция на ускорението на всяка от сградите и по този начин осигурява по-ефикасно управление на ускоренията.

#### 4.5.5. $H_2$ управление на вибрираща интелигентна греда

**Въведение.** Основната блок диаграма, която се използва в тази част е дадена на Фиг.4.23



**Фигура 4.23.** Диаграма на затворената верига

Тук **G** е обобщената техническа система и **K** е управлението. И двете **G** и **K** са реални, рационални и правилни. Разглеждаме крайномерна линейна стационарна система. Обобщената техническа система **G** съдържа номиналната система и всички тегловни функции. Сигналят **w** съдържа всички външни входи в това число и смущенията, входния сигнали шума от измерването на датчика. Изходът **z** е сигналът на грешката. Векторът **y** съдържа измерваните променливи и **u** е управляващият входен сигнал. Предавателната функция на затворената верига от **w** към **z** е означена с  $T_{zw}$ .

За мярка на качеството избираме  $H_2$  нормата на устойчива предавателна матрица  $G(s)$  в честотната област, дефинирана с [65].

$$\|G\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G^*(j\omega)G(j\omega)] d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.86)$$

където в пространството на състоянията е

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] = C(sI - A)^{-1} B .$$

Ако  $L_c$  е грамианът на управляемостта за  $(A,B)$  и  $L_o$  е грамианът на наблюдаемостта за  $(C,A)$ , то  $L_c$  и  $L_o$  удовлетворяват уравнението на Ляпунов

$$AL_c + L_c A^T + BB^T = 0, \quad A^T L_o + L_o A + C^T C = 0$$

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C^T) = \text{tr}(B^T L_o B) . \quad (4.87)$$

Това пресмятане включва решението на линейно уравнение и може да бъде пресметнато с краен брой итерации.

За задачата за стабилизиране на интелигентна греда, подложена на външни влияния използваме следната реализация на предавателната матрица **G** в пространството на състоянията

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]. \quad (4.88)$$

Ако означим размерностите на входните и изходните вектори с  $\dim x = n$ ,  $\dim w = m_1$ ,  $\dim u = m_2$ ,  $\dim z = p_1$ ,  $\dim y = p_2$ , то условията на стандартната  $H_2$  теория са [56]. (§4.2.1 условия  $(A1)_{H_2}$  –  $(A5)_{H_2}$  на основната теорема за обратна връзка по изход)

- $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема;
- $\text{rank} D_{12} = m_2$ ,  $\text{rank} D_{21} = p_2$ ;
- $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$  за всички честоти;
- $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$  за всички честоти;
- $D_{12}^T D_{12} > 0$ ,  $D_{21} D_{21}^T > 0$ ;
- $D_{11} = 0$ ,  $D_{22} = 0$ .

Ще припомним, че първото предположение гарантира, че  $G(j\omega)$  е стабилизируема чрез обратна връзка. Третото и четвъртото предположения заедно с първото гарантират, че двете алгебрични уравнения на Рикати, асоциирани със задачата, имат единствени положително определени решения. Второто условие осигурява управлението да бъде правилно и предавателната матрица от  $w$  към  $y$  не става нула при високи честоти. Последното предположение опростява значително изчисленията.

**Синтез на  $H_2$  управление.** Управлението търсим във вида

$$u = K_c \hat{x}, \quad (4.89)$$

където  $\hat{x}$  е оптимална оценка на състоянието  $x$ . Задачата е да се намери допустимо управление  $K_c$ , което минимизира  $\|T_{zw}\|_2$ . При решаването на тази  $H_2$  задача се използва оценител на състоянието и оценените състояния се връщат обратно. Матриците на управлението и оценителя се пресмятат от двете алгебрични уравнения на Рикати.

Нека  $X_2$  и  $Y_2$  са съответните положително определени решения на уравненията на Рикати. Тогава съответните матрици на управлението и на оценителя са

$$K_2 = -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T X_2 + D_{12}^T C_1) \quad (4.90)$$

$$L_2 = -(Y_2 C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \quad (4.91)$$

и реализациите на съответните системи в пространството на състоянията ще приемат вида

$$G_c = \begin{bmatrix} A + B_2 K_2 & I \\ C_1 + D_{21} K_2 & 0 \end{bmatrix} \quad G_l = \begin{bmatrix} A + L_2 C_2 & B_1 + L_2 D_{21} \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Фиг.4.24 показва блок-диаграмата на управляемата система

Единственото  $H_2$  оптимално управление се представя с формулата

$$K_c = \begin{bmatrix} A + B_2 K_2 + L_2 C_2 & -L_2 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

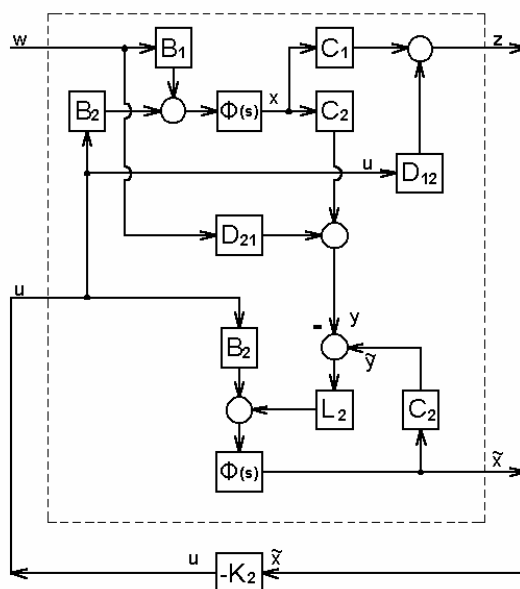
В този случай имаме

$$\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \left\| \left( D_{12}^T D_{12} \right)^{\frac{1}{2}} K_2 G_l \right\|_2^2 = \text{tr}(B_1^T X_2 B_1) + \text{tr}(D_{12}^T D_{12} K_2 Y_2 K_2^T).$$

Управлението  $K_c$  има сепарирана структура. Това, както беше вече обяснено, ще рече, че задачата за обратна връзка по изхода се редуцира на комбинация от задача по пълна информация и задача за оценка на изхода. Уравненията на управлението могат да бъдат записани във форма на наблюдател по следния начин

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L_2 [C_2 \hat{x} - y]$$

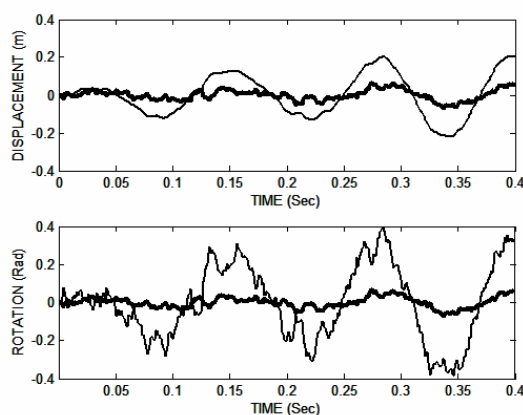
$$u = K_2 \hat{x}$$



Фигура 4.24. Блок-диаграма на затворената верига за интелигентната гред

**Числени симулации.** С предложената методология решаваме числено задачата за интелигентна гред, която предполагаме запъната от единия край. За управляващо устройство и датчик се използват пиезоелектрически слоеве със свойства цитирани в [66]. Гредата е моделирана с четири крайни елемента. Четири двойки управляващи

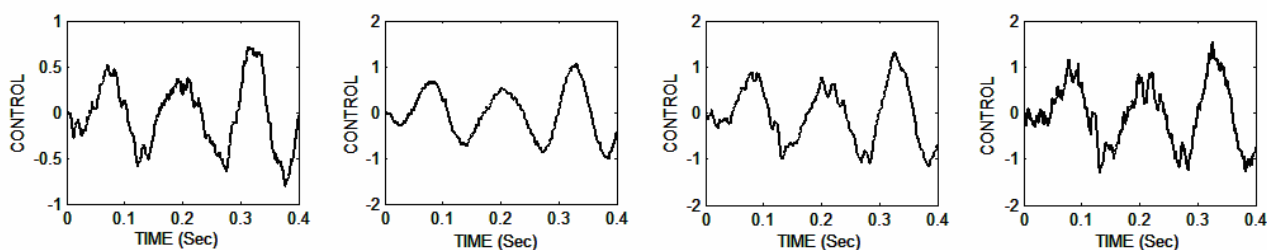
пиезоелектрически плочки са закрепени симетрично но всяка четвърт от горната и долната страна на всяка четвърт на гредата



**Фигура 4.25:** Свободен край на гредата: свободно вибриране (тънка) и при робастно  $H_2$  управление (плътна)

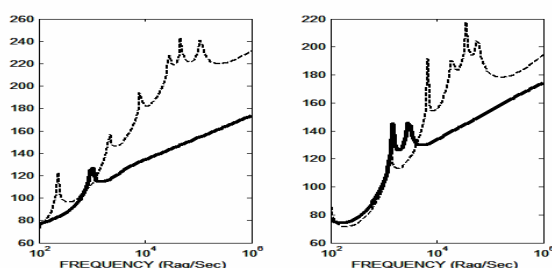
Позволеният волтаж при пиезоелектрици е  $-500V$  to  $+500V$ . При решаването на задачата това допълнително ограничение е взето предвид, за да не се повредят управляващите пиезоелектрически пластинки. То се постига чрез балансиране на нивото на управлението на вибрациите и големината на управляващия волтаж. Фиг.4.25 показва времевата реакция на свободния край на гредата без управление и при прилагане на волтаж с  $H_2$  оптимална стратегия. Вижда се, че реакцията на напречното преместване и ротацията намаляват значително при наличие на управляваща сила.

Фиг.4.26 представя управлението, приложено към всяка от четирите пиезоелектрически пластинки на гредата. Волтажът удовлетворява ограниченията.



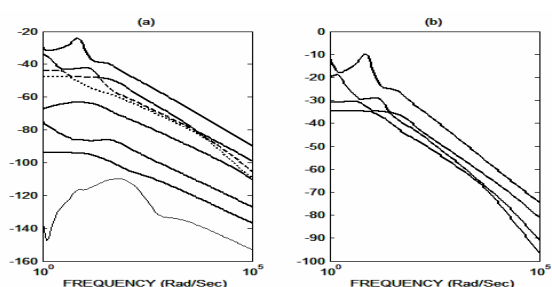
**Фигура 4.26.** Входният волтаж за управляващите пиезоелектрически пластинки

Фиг.4.27 показва реакцията в честотната област на отворената и на затворената верига при  $H_2$  управление за свободния край на гредата. Може да се забележи, че влиянието и промените при прилагането на  $H_2$  управление е значително.



**Фигура 4.27:** Честотна реакция на гредата: свободни (точкова) -и, управляеми вибрации (плътна)

Фиг.4.28 представя Bode плот на сингулярните стойности (СС) на предавателната функция  $T_{zw}$  на затворената верига и на робастното  $H_2$  управление.



**Фигура 4.28:** Графика на СС на предавателната функция  $T_{zw}$  (ляво) и на  $H_2$  управлението (дясно).

Подобен подход при интелигентни структури, в зависимост от конкретните изисквания към структурата, може да се използва и за строителни структури, подложени на сеизмична активност и силен вятър.

#### 4.5.6. $H_2$ управление за композитни плочи

Уравнението на движението за композитна плоча, което се използва, е получено на базата на КТСП класическата теория за слоести плочи при огъване на Кирхоф [67]. Едно от най-важните предположения в тази теория е, че напречната деформация се пренебрегва. След апроксимация с МКЕ с правоъгълен елемент с четири възела се получава дискретизираната система от обикновени диференциални уравнения от втори ред за динамиката на еластична плоча

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F_m + F_e \quad (4.93)$$

където  $M$  е масовата матрица,  $K$  е матрицата на коравината и  $D$  е матрицата на дъмпинга (тук се използва предположението на Райлейх, т.е. дъмпинг матрицата се разглежда като линейна комбинация на матрицата на коравината и на масовата матрица с подходящи константи). Тук  $F_m$  е външното механично натоварване, а  $F_e$  са силите на управлението. Решението на ур. (4.93) дава вибрациите на разглежданата плоча.

Пукнатини и друг вид дефекти на плочата са моделирани в широкия смисъл на дефекти чрез редуциране на матриците на коравината и на масата на съответния

краен елемент. За опростяване на модела се предполага, че неизвестна е само позицията на възможната пукнатина. За целите на синтеза на управлението ур. (4.93) се преписва във вида:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, \quad (4.94)$$

където  $\mathbf{x}$  е векторът на състоянието,  $\mathbf{A}$  е системната матрица,  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$  позиционни матрици за смущенията  $\mathbf{w}$  (от външното натоварване  $\mathbf{F}_m$ ) и управлението  $\mathbf{u}$  (от силата  $\mathbf{F}_e$ ).

Математическият модел (4.94) представлява линейно изображение от входовете към реакциите. Началните условия се предполагат нулеви. Разглеждаме задача тип регулиране и целта ни е да поддържаме равновесие на слоестата плоча в присъствие на външни смущения чрез подходящ закон за управление по обратна връзка. Сигналите, изпратени към управляващото устройство са функции на състоянията на системата, измерени с подходящи датчици. Измерените изходи означаваме с  $\mathbf{y}(t)$  и предполагаме, че са линейни комбинации на състоянията на системата. Целта е да определим управлението  $\mathbf{u}(t)$  подчинено на критерий за качество и удовлетворяващо ур. (4.94) така, че да се намали по оптимален начин реакцията на плочата на външните смущения. Управлението е по изход и се търси във вида

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t) \quad (4.95)$$

Търсим матрицата  $\mathbf{K}$ . Задачата за погасяване на вибрациите на гъвкава слоеста плоча се решава с ЛКР и  $\mathbf{H}_2$  оптимални критерии за качество.

За ЛКР управление използваме критерия (4.2)

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \min \quad (4.96)$$

представляващ претеглената сума на енергията на плочата и управляващата сила. Теглата  $\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}$  и  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$  са главните параметри на синтеза. Управляващият коефициент-матрица  $\mathbf{K}_{LQR}$  е константа във вида

$$\mathbf{K}_{LQR} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}, \quad (4.97)$$

където константната матрица  $\mathbf{P}$  е положителното решение на алгебричното уравнение на Рикати (4.10)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (4.98)$$

ЛКР критерият изисква пълна информация за състоянието на плочата. Негово предимство е линейността на управлението и доброто отхвърляне на смущенията и доброто следене. Той осигурява асимптотична устойчивост на системата и задоволително погасяване на вибрациите при добър избор на параметрите на синтеза. Но при ограничена възможност за измерване на състоянията и/или повредени изходи, повечето от неговите привлекателни свойства се губят. В този случай е по-основателно да се използва стратегията на  $\mathbf{H}_2$  оптимално управление.

$\mathbf{H}_2$  оптималното управление се синтезира условно в две фази. През първата фаза с помощта на филтъра на Калман-Буси от повредените измервания се оценява целият

вектор на състоянията. През втората фаза се получава коефициентът-матрица на управлението.

Нека векторът на измерванията при изхода, който се връща към управлението е линейна комбинация на състоянията и е повреден

$$y = C_2 x + D_{21} w. \quad (4.99)$$

И нека въведем изходен вектор, който съдържа изходите, които искаме да управляваме

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (4.100).$$

Уравнения (4.94),(4.99),(4.100) са по-общо представяне на динамичния модел на плочата в пространството на състоянията, който е по-подходящ за задачата за  $H_2$  оптимално управление. Ние искаме да минимизираме влиянието на смущенията върху управлявания изход  $z$ . Затова подходящ критерий за качество за тази цел е  $H_2$  нормата на преходната функция  $T_{zw}$  от смущенията  $w$  към управляемите изходи  $z$ , която трябва да се минимизира по всички управления, вътрешно стабилизиращи техническата система.

$$\|T_{zw}\|_2 = \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}[T_{zw}^*(j\omega) T_{zw}(j\omega)] d\omega \right)^{1/2} \rightarrow \min. \quad (4.101)$$

Когато смущенията са бял шум процеси с единичен интензитет, критерият за качество (4.101) минимизира най-лошия случай на средно квадратичната стойност на управляваните променливи. Ако  $X$  и  $Y$  са положителните решения на двете уравнения на Рикатиа, асоциирани със задачата  $H_2$  за управление (4.20)

$$\begin{aligned} A^T X + XA - XB_2 B_2^T X + C_1^T C_1 &= 0 \\ AY + YA^T - YC_2^T C_2 Y + B_1 B_1^T &= 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

Управлението  $K_2$ , което е единствено, и удовлетворява критерия (4.101) се дава със следната формула (ур. (4.16)–(4.19))

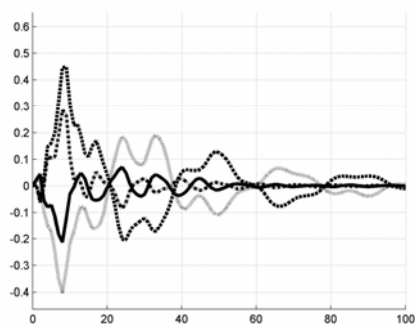
$$K_2 = \left[ \begin{array}{c|c} A - B_2 B_2^T X - Y C_2^T C_2 & Y C_2^T \\ \hline -B_2^T X & 0 \end{array} \right] \quad (4.103)$$

Синтезът на  $H_2$  управление дава робастност по отношение на смущенията. Необходим е разумен баланс между качеството на управляемата система и нейната робастност, за да се избегне пренастищане на управляващото устройство.

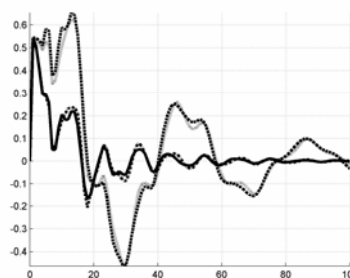
Числени изследвания са изпълнени в пакета MATLAB за потвърждаване на предложените закони ЛКР и  $H_2$  за управление заедно със създадения МКЕ модел. Създаден е интерфейс (програма FEAPIP налична в GPL (GNU Public License) в интернет, с който лесно се изследват модели с различни дискретизации по времето и пространството и с различно натоварване, различни закони за управление, различно разположение на възможни пукнатини и повреди. Данните, получени при моделирането и динамичния анализ могат да се съхраняват и използват многократно.

В този параграф за числени симулации е използвана квадратна плоча, дискретизирана с мрежа от  $10 \times 10$  елемента. Четирите краища на плочата са закрепени. Предполага се, че само един от елементите е повреден. Мястото на повредата е показано на Фиг.4.30. Вибрациите на плочата се породени от моментна концентрирана сила, приложена във вертикална посока в центъра на плочата. На Фиг.4.29а е показано поведението във времето на мястото на пукнатината, а на Фиг.29б е показано поведението на центъра на плочата.

Броят и разположението на управляващите устройства е много важен за ефективността на оптималното управление и също зависи от конкретната ситуация на разглеждания проблем. Както лесно може да се съобрази, потискането на вибрациите е по-добро, когато на структурата са разположени повече на брой управляващи устройства. Когато броят на управляващите устройства е ограничен (което е често срещаният случай заради силното усложняване на алгоритъма на управление) местоположенията на управляващите устройства трябва да бъде подходящо избран. Броят на възможните комбинации за даден брой управляващи устройства може да бъде огромен.



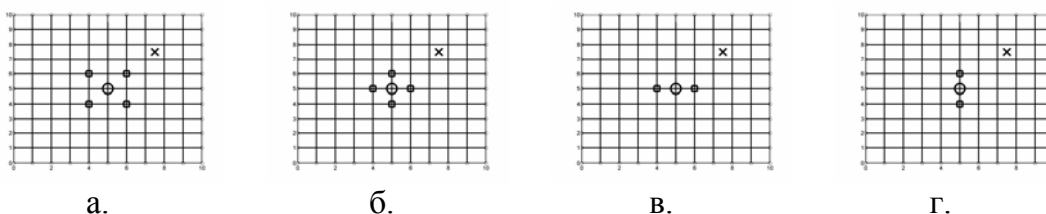
а. възел с повреда



б. център на плочата

**Фигура 4.29:** Вибрацията на две точки от плочата: свободна с повреда (пунктирана), свободна без повреда (точкова), управлявана с повреда (плътна), управлявана без повреда (пунктир с точки).

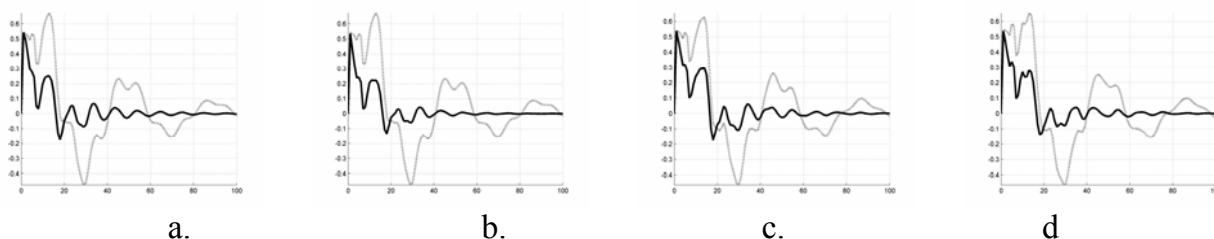
Четири различни схеми с четири или две позиции на управление, избрани симетрично са разгледани при компютърните симулации (Фиг.4.30).



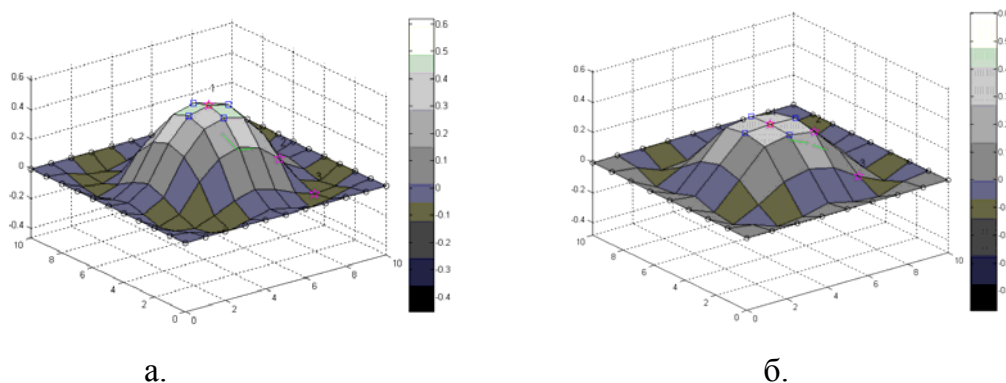
**Фигура 4.30:** Позиции на управлението ( $\square$ ) и на повредения елемент ( $\times$ )

Числените изследвания са изпълнени при предположението, че всички състояния (напречните премествания и двете ротации около осите  $x$  и  $y$  както и техните скорости във всеки възел) могат да се замерват (т.е. решавана е задачата с пълна информация). Разгледан е също и случаят за управление по изход, т.е. когато само част от вектора на състоянията може да бъде измерен.

Приложени са двата закона на управление за погасяване на вибрациите. Управляващата сила действа във вертикална посока чрез пиезоелектрически пластинки, намалявайки ефектът от вредните вибрации. Поведението във времето на системата със затворена верига сравнен с това при отворена верига по отношение на намаляването на максималната големина на вертикалните премествания е показан на Фиг.4.31 при ЛКР управление за четирите схеми във Фиг.4.30.



**Фигура 4.31:** Свободни вибрации (пунктирна) и с ЛКР управление (плътна) на центъра на плочата.

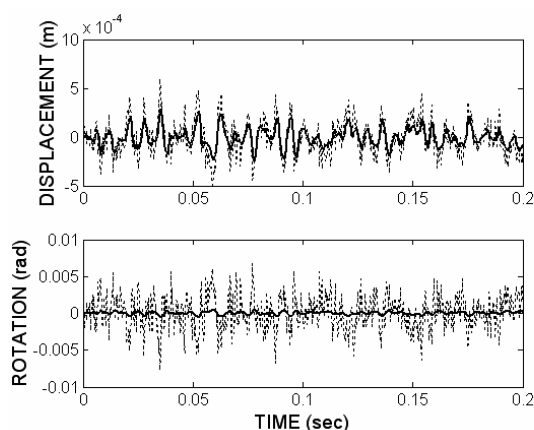


**Фигура 4.32:** Поведение на свободно вибрираща (а) и  $H_2$  управлявана плоча в четвърта секунда след въздействието

Тегловната матрица при управлението  $\mathbf{R}$  в ур. (4.96) е избрана единична с размер равен на броя на управленията. Тегловната матрица при състоянията  $\mathbf{Q}$  е избрана диагонална и постоянна със стойности на ненулевите елементи 0.01. Когато се избират по-малки стойности за елементите на  $\mathbf{Q}$  може да бъде подобро погасяването на вибрациите, но това означава, че се усилва влиянието на управляващите сили, което може да доведе до пренасищане в управлението и дори до повреди в пиезоелектричните пластинки.

На Фиг.4.32 е показана реакцията на неуправляваната (Фиг.4.32а) и на управляваната (Фиг.4.32б) при  $H_2$  управление плоча. Използвани са четири позиции за управление, показани на Фиг.4.30а.

Направените симулационни експерименти за двете стратегии на управление при различни групи от замервани състояния показват, че ефектът от управлението е по-голям, ако обратната връзка е организирана по напречните премествания. На Фиг.4.33 е показано поведението на центъра на плочата със закрепени краища при натоварване тип бял шум, приложено в центъра на плочата



**Фигура 4.33:** Преместване и ротация в х посока на центъра на плочата: не управлявана (точкова) и  $H_2$  управлявана (плътна)

## 4.6. Други задачи

### 4.6.1. Задачи за оптимално управление

**Линейно квадратично управление с матрици, зависещи от времето.** Синтеза на ЛКР управление дефинирахме като оптимизационна задача, в която функционалът (4.2) трябваше да бъде минимизиран като оптимизационният хоризонт се предполагаше безкраен. Сега разглеждаме същата задача, но за краен времеви хоризонт. В този случай могат да се използват матрици, зависещи от времето, и функционалът може да бъде дефиниран по следния начин ( $S = 0$ ):

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(t_1) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t_1) + \int_0^{t_1} (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t)) dt . \quad (4.104)$$

Матриците на системата също могат да зависят от времето

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 . \quad (4.105)$$

Задачата е да се минимизира функционалът (4.105) по всички функции  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ , принадлежащи към подходящо функционално пространство при ограничението (3.99). Решението на тази задача е подобно на това на ЛКР задачата. Оптималното управление се определя с формулата

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{X}(t) \mathbf{x}(t) . \quad (4.106)$$

Тук  $\mathbf{X}$  е решение на следното диференциално уравнение на Рикати

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}^T(t) \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}(t) - \mathbf{X} \mathbf{B}(t) \mathbf{R}^{-1}(t) \mathbf{B}^T(t) \mathbf{X} + \mathbf{Q}(t) \\ \mathbf{X}(t_1) &= \mathbf{Q}_1 . \end{aligned} \quad (4.107)$$

Ако всички матрици в ур. (4.107) са константни, то константните решения на ур. (4.107) са решенията на алгебричното уравнение на Рикати. Основната разлика е, че матриците на закона за обратна връзка (4.106) зависят от времето. Филтърът на Калман също може да бъде обобщен за случая на линейни системи, зависещи от времето.

**Обща формулировка на задачи за оптимално управление.** Много по-общ клас от задачи за оптимално управление възниква, когато се допускат *неквадратични целеви функционали*, нелинейни диференциални уравнения и допълнителни ограничения. Необходимите условия за оптималност са формулирани в знаменития принцип на Понтрягин за максимума.

Задача от този вид може да се формулира по следни начин.

Да се минимизира

$$\int_0^T f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt$$

по всички функции  $x(t)$  и  $u(t)$ , принадлежащи към подходящо функционално пространство, при ограниченията

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$$

$$\mathbf{u}(t) \in M \quad \text{за почти всички } t \in [0, T].$$

Важна разлика за ЛКР задачата с променливи във времето матрици е тази, че от обратна връзка по  $\mathbf{x}$  не може да се получи оптимално решение. Въпреки това, обратната връзка (4.106) може да бъде получена като частен случай от принципа на Понтрягин за максимума.

#### 4.6.2. Системи описани с частни диференциални уравнения –закрепена греда

Тук ще засегнем задачи, чиято динамика се описва с частно диференциално уравнение (ЧДУ). Пресмятанията тук не са подкрепени със строги математически доказателства, но това може да се направи. По-пространни и задълбочени разглеждания могат да се потърсят например в [68]. Тук ще разгледаме един конкретен случай на греда, закрепена шарнирно.

Шарнирно закрепената греда се описва с ЧДУ от втори ред по времето  $t$ .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(t, x) = -\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}(t, x)$$

$$z(t, 0) = 0, \quad z(t, 1) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t, 1) = u(t)$$

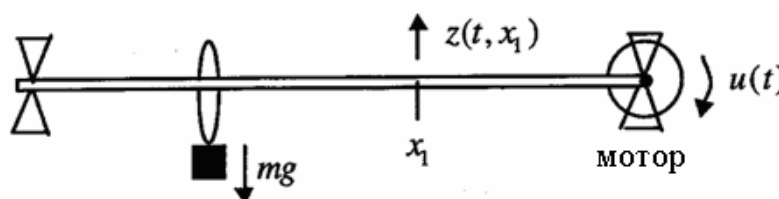
$$z(0, x) = z_0(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(0, x) = z_1(x).$$

(4.108)

Тук  $z$  е преместването на гредата. Граничните условия означават следното. Краищата на гредата са фиксирани; в левият край огъващият момент е нула, докато в десния край огъващият момент се определя от управлението  $u(t)$ . Наблюдава се отместването на гредата в точка  $x_1$  (Фиг.4.34).

$$y(t) = z(t, x_1).$$

Задачата е управлението да подтиска вибрациите в точка  $x = x_1$  на гредата, които са причинени от сила, действаща върху гредата в друга точка.



Фигура 4.34. Управление на вибрираща греда

Предавателната функция е

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k\pi \sin(k\pi x_1)}{s^2 + (k\pi)^4}.$$

Това е суперпозиция на преносни функции от втори ред без дъмпинг. Подобна задача може да се дефинира, ако левият край на гредата е свободен. Тогава във предавателната функция трябва да се добави двоен интегратор. Предавателната функция може да се получи и директно от системата чрез трансформация на Лаплас. Използваме израза

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial z}{\partial x}(\cdot, x)\right)(s) = \frac{d}{dx} \mathcal{L}(z(\cdot, x))(s) = \frac{d}{dx} \hat{z}(s, x).$$

Тогава трансформацията на Лаплас води до следната гранична задача за  $\hat{z}(s, x)$  с параметър  $s$ .

$$\frac{d^4 \hat{z}}{dx^4}(s, x) = -s^2 \hat{z}(s, x)$$

$$\hat{z}(s, 0) = 0, \quad \hat{z}(s, 1) = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{z}}{dx^2}(s, 0) = 0, \quad \frac{d^2 \hat{z}}{dx^2}(s, 1) = \hat{u}(s).$$

Това е линейна гранична задача за функцията  $\hat{z}(s, \cdot)$ , чието решение при  $x_1$  дава друга формула за предавателната функция:

$$G(s) = \frac{\cos \lambda \sinh \lambda \sin \lambda x_1 \cosh \lambda x_1 - \sin \lambda \cosh \lambda \cos \lambda x_1 \sinh \lambda x_1}{s (\sin^2 \lambda + \sinh^2 \lambda)} \quad (\lambda = \sqrt{s} / \sqrt{2}).$$

За тази задача също могат да се формулират всички въпроси, отнасящи се до теория на системите и до синтез на управление, но това е извън целите на настоящата работа.



## 5. $H_\infty$ оптимално управление – Рикати подход

Беше разгледана задачата за минимизиране на предавателната функция  $F_{zw}$  по отношение на  $H_2$  нормата и критериите за качество бяха дадени във времевата област. За спецификации в честотната област  $H_\infty$  нормата е адекватен инструментариум. Затова естествено възниква въпросът как могат да бъдат характеризирани управленията по такъв начин, че да се минимизира предавателната функция  $F_{zw}$  на затворената верига по отношение на  $H_\infty$  нормата. Има два важни подхода за решаването на тази задача. Единият се основава на две уравнения на Рикати, аналогично на този използван за  $H_2$  задачата. Той ще бъде разгледан в тази глава. Другият метод използва линейни матрични неравенства и ще бъде представен в следващата глава.

Както ще бъде показано, ще стигнем до построяване на субоптимални управления вместо оптимални управления. Основната идея за решаване на задачата е, както за  $H_2$  задачата, смяната на променливи от вида  $v = u - Fx$  с матрица  $F$ , която е свързана с уравнението на Рикати. Задачата, която се получава като резултат е отново задача за оценяване на изхода, която може да се редуцира в няколко стъпки до задачата с пълна информация. Техническите детайли са значително по-сложни от тези на  $H_2$  задачата. Основната структура на техническата система е подобна на тази при  $H_2$  управлението. Отново е направено предположението  $D_{11} = 0$ . Това предположение е естествено за  $H_2$  задачата, но е ограничително за  $H_\infty$  задачата, тъй като въвеждането на тегла с цел да се постигне определена честотна реакция на затворената верига води до обобщени технически системи с  $D_{11} \neq 0$ . Редуцирането на задачи с  $D_{11} \neq 0$  до такива с  $D_{11} = 0$  е възможно с процедура, наречена отместване на веригата. Въвеждането на тегла, зависещи от честотата в много ситуации води до задача за смесена чувствителност.

### 5.1. Формулиране на общата $H_\infty$ задача

Разглеждаме обща техническа система във вида

$$P(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}, \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}. \end{array} \quad (5.1)$$

Едно управление  $\mathbf{K}(s)$  ще наричаме **допустимо**, ако то е правилно и ако стабилизира вътрешно системата  $\mathbf{F}_{zw}(s)$ . Така формулираме следната задача

**Оптимална  $H_\infty$  задача.** Да се намерят всички допустими управления  $\mathbf{K}(s)$ , които минимизират  $H_\infty$  нормата на системата с обратна връзка, т.е. всички допустими управления, които минимизират  $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty$ .

За минимизирането на  $H_\infty$  нормата е по-естествено да се търсят всички субоптимални управления. Намирането на оптимално управление е по-трудно и, освен това, оптимални управления за  $H_\infty$  задачата не са единствени. Те могат да се разглеждат като граничния случай на субоптимални управления и не могат да се конструират аналитически. Така стигаме до следната задача

**Субоптимална  $H_\infty$  задача.** За дадено число  $\gamma > 0$  да се намерят всички допустими управления  $\mathbf{K}(s)$  с  $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Такова управление ще наричаме **субоптимално**.

Дефинираме

$$\gamma_{\text{opt}} = \inf \{ \|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty \mid \mathbf{K}(s) \text{ е допустим} \}.$$

За  $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$  не съществуват субоптимални управления. За числа  $\gamma$ , които са по-големи от оптималната стойност на  $\gamma_{\text{opt}}$ , винаги съществуват допустими управления с  $\|\mathbf{F}_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Цялостното характеризиране на субоптималните управления за  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$  е възможно.

## 5.2. $H_\infty$ субоптимално управление в по метода на Рикати

### 5.2.1. Основна теорема за обратна връзка по изходи

Тук ще опишем субоптимални  $H_\infty$  управления за задачи със специална структура. Ще направим следните предположения

(A1) $_{H_\infty}$   $(A, B_1)$  е стабилизируема и  $(C_1, A)$  е откриваема.

(A2) $_{H_\infty}$   $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема.

(A3) $_{H_\infty}$   $D_{12}^T C_1 = 0$  и  $D_{12}^T D_{12} = I$ .

(A4) $_{H_\infty}$   $B_1 D_{21}^T = 0$  и  $D_{21} D_{21}^T = I$ .

(A5) $_{H_\infty}$   $D_{11} = 0$  и  $D_{22} = 0$

Предположения  $(A1)_{H\infty}$ ,  $(A3)_{H\infty}$ ,  $(A4)_{H\infty}$  осигуряват вътрешна устойчивост на веригата с обратна връзка тогава и само тогава, когато  $F_{zw} \in \mathbf{RH}_\infty$ .

Нека въведем следните матрици на Хамилтон

$$\mathbf{H}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{J}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

### Теорема за обратна връзка по изход.

Разглеждаме система (5.1) и търсим оптимално управление  $\mathbf{K}$ , което да стабилизира системата (5.1), за което  $H_\infty$  нормата на предавателната ѝ функция  $F_{zw}$  е по-малка от предварително зададено число  $\gamma$ .

Ако са изпълнени предположенията  $(A1)_{H\infty}$  -  $(A5)_{H\infty}$ , то съществува допустимо управление  $\mathbf{K}$ , за което  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  тогава и само тогава, когато са изпълнени следните условия:

(i)  $\mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq \mathbf{0}$ ;

(ii)  $\mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq \mathbf{0}$ ;

(iii)  $\rho(\mathbf{X}_\infty\mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$ .

Управлението се дава с формулата

$$\mathbf{K}_{sub}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty \\ \mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (5.4)$$

където

$$\hat{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty\mathbf{C}_2$$

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty, \quad \mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty\mathbf{C}_2^T, \quad \mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2}\mathbf{Y}_\infty\mathbf{X}_\infty)^{-1}.$$

$H_\infty$  субоптималното управление има също представянето

$$\mathbf{K}_{sub}(s) = -\mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}_\infty)^{-1}\mathbf{F}_\infty. \quad (5.4)$$

То има толкова състояния колкото и обобщената техническа система  $P(s)$  и е строго правилен. Уравненията на Рикати за  $\mathbf{X}_\infty$  и  $\mathbf{Y}_\infty$  са:

$$\mathbf{X}_\infty\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{X}_\infty - \mathbf{X}_\infty(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T - \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T)\mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty\mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_\infty(\mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 - \gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1)\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

Неравенството  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  може да се запише следния еквивалентен начин

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 < 0, \quad w \in \mathcal{L}_2[0, \infty), \quad w \neq 0. \quad (6.6)$$

където  $z$  се подчинява на уравненията

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = 0 \\ z &= C_1 x + D_{12} u, \end{aligned}$$

и  $u$  е изходът на управлението. Предполагаме, че уравнението на Рикати (5.5) има решение  $X_\infty$ . Тогава заедно с предположение (A3) $_{H_\infty}$  имаме

$$\frac{d}{dt}(x^T X_\infty x) = -\|z\|^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - \gamma^2 \|w - \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x\|^2 + \|u + B_2^T X_\infty x\|^2.$$

Да предположим, че  $x(t) \rightarrow x_\infty = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогава след интегриране получаваме

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = \|u + B_2^T X_\infty x\|_2^2 - \gamma^2 \|w - \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x\|_2^2. \quad (5.7)$$

Ако са известни всички състояния, то можем да изберем управлението във вида

$$u = -B_2^T X_\infty x \quad (5.8)$$

което води до

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 = -\gamma^2 \|w - \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x\|_2^2 \quad w \in \mathcal{L}_2[0, \infty).$$

Разликата в дясната част става нула само при  $x=0$  и  $w=0$ . Следователно с управление (5.8) е в сила неравенство (6.6) и следователно имаме  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

Въвеждаме следните означения

$$A_{F_\infty} = A + B_2 F_\infty, \quad C_{1F_\infty} = C_1 + D_{12} F_\infty$$

При известни всички състояния и  $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ , то неравенството  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  е вярно, ако управлението има постоянна матрица

$$K(s) = -B_2^T X_\infty.$$

Ур. (5.7) дава ключ за решаване на  $H_\infty$  задачата и когато не всички състояния са известни. В този случай се въвеждат променливите

$$v = u - F_\infty x, \quad r = w - \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x.$$

Тогава уравненията на системата придобиват вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{F_\infty} x + B_1 w + B_2 v \\ z &= C_{1F_\infty} x + D_{12} v \\ r &= -\gamma^{-2} B_1^T X_\infty x + w \end{aligned}$$

Ако означим

$$\mathbf{A}_{imp} = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty$$

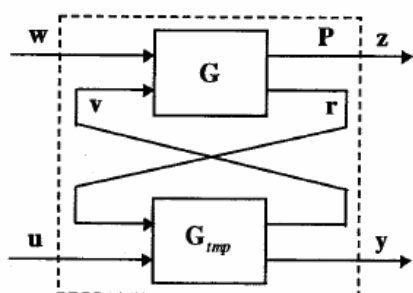
с предположението  $(A4)_{H\infty} \mathbf{B}_1 \mathbf{D}_{21}^T = \mathbf{0}$  получаваме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{imp} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{r} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}$$

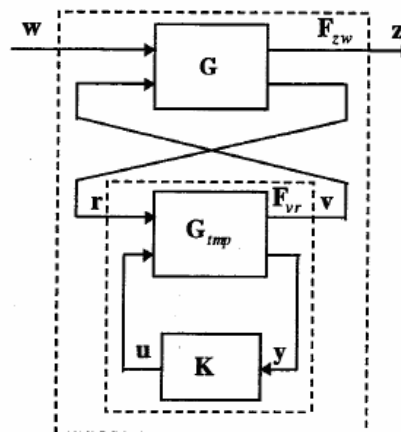
$$\mathbf{v} = -\mathbf{F}_\infty \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{r}.$$

(5.9)



Фигура 5.1. Декомпозиция на P в G и  $G_{imp}$



Фигура 5.2. Структура на  $F_{zw}, F_{vr}$

Предавателните матрици, принадлежащи на системите са означени по следния начин

$$\mathbf{G} = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A}_{F_z} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_{1F_z} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \\ -\gamma^{-2} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \mathbf{G}_{imp} = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A}_{imp} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Ако  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{G}_{imp}$  са построени както на Фиг.5.1, това дава оригиналната техническа система P. Нейната затворена верига с управление K е  $F_{zw}$ . Затворената верига за техническата система  $\mathbf{G}_{imp}$  с управление K означаваме с  $F_{vr}$  (Фиг.5.2).

Ясно е, че управление за  $\mathbf{G}_{imp}$  поражда също управление за P.  $\mathbf{G}_{imp}$  е ОИ задача. Тази ОИ задача има дуална ВР задача, която може да се разглежда като частен случай на ПИ задачата. Това е възможно, само ако има подходяща връзка между нормите на  $F_{zw}$  и  $F_{vr}$ . От ур. (5.7) имаме

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{v}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{r}\|_2^2 \tag{5.10}$$

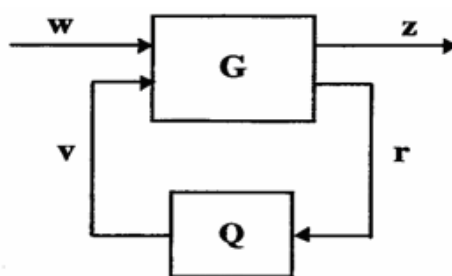
и следователно  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  тогава и само тогава, когато  $\|F_{vr}\|_\infty < \gamma$ . По-точно:

Управлението K е допустимо за P и  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  тогава и само тогава, когато K е допустимо за  $G_{imp}$  и  $\|F_{vr}\|_\infty < \gamma$ .

### 5.2.2. Устойчивост

Разглеждаме системата представена на Фиг. 5.3. с подходящо разделена матрица  $G$

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}.$$

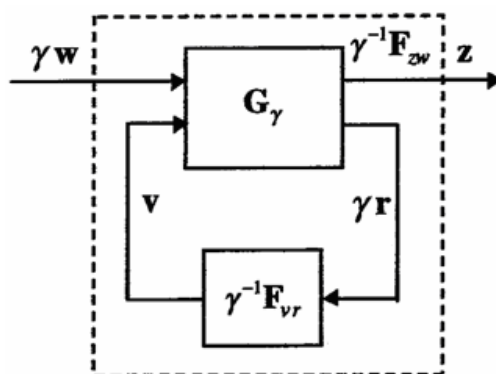


Фигура 5.3. Устойчивост

Нека  $G \in RH_\infty$  и предположим, че  $G_{21}^{-1}$  съществува,  $G_{21}^{-1} \in RH_\infty$  и  $G^{-1}H = I$ . Тогава, ако матрицата  $Q$  е правилна рационална предавателна матрица, то следните две твърдения са еквивалентни:

(1) Системата с обратна връзка (Фиг.5.3) е коректно поставена, вътрешно устойчива и  $\|F_{zw}\|_\infty < 1$ .

(2)  $Q \in RH_\infty$  и  $\|Q\|_\infty < 1$ .



Фигура 5.4. Преформулиране на блок диаграмата от Фиг. 5.2

От ур. (5.10) следва, че

$$\|z\|_2^2 + \|\gamma r\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \|\gamma w\|_2^2$$

и следователно

$$G_\gamma = \left( \begin{array}{c|cc} A_{F_z} & \gamma^{-1}B_1 & B_2 \\ \hline C_{1F_z} & 0 & D_{12} \\ -\gamma^{-1}B_1^T X_\infty & I & 0 \end{array} \right),$$

е вътрешна, защото

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \gamma \hat{r} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_\gamma \begin{pmatrix} \gamma \hat{w} \\ \hat{v} \end{pmatrix}.$$

Заместваме блок диаграмата от Фиг.5.2 с блок диаграмата от Фиг.5.4. Означаваме с  $F_{z(\gamma w)}$  предавателната функция, която се получава, когато в системата с обратна връзка  $F_{zw}$  техническата система  $\mathbf{G}$  е заменена с  $\mathbf{G}_\gamma$ . Тогава имаме

$$\mathbf{F}_{z(\gamma w)} = \gamma^{-1} \mathbf{F}_{zw}$$

Нека освен това

$$\mathbf{F}_{v(\gamma r)} = \gamma^{-1} \mathbf{F}_{vr}.$$

Тогава  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  е еквивалентно на  $\|F_{z(\gamma w)}\|_\infty < 1$  и неравенството  $\|F_{vr}\|_\infty < \gamma$  е еквивалентно на  $\|F_{v(\gamma r)}\|_\infty < 1$ . И така можем да твърдим, че:

Ако  $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ , то  $G_\gamma \in RH_\infty$  и е вътрешна, и  $G_{\gamma 21}^{-1} \in RH_\infty$ .

както и

Ако  $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ , то  $\mathbf{K}$  е допустим за  $\mathbf{P}$  и  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  тогава и само тогава, когато  $\mathbf{K}$  е допустим за  $G_{mp}$  и  $\|F_{vr}\|_\infty < \gamma$ .

### 5.3. $H_\infty$ управление с пълна информация

#### 5.3.1. Смесени Ханкел-Тоеплитц оператори

В този параграф ще разгледаме оператор, който се използва при построяване на  $H_\infty$  управление. Нека разгледаме устойчива система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

и да въведем така наречения **оператор на управляемостта**

$$\Psi_c : \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

с израза

$$\Psi_c(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^0 e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \tag{5.11}$$

Нека разгледаме следната предавателна матрица с  $B = (B_1 \ B_2)$  и устойчива матрица  $A$

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{G}_1(s) \ \mathbf{G}_2(s)) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right), \tag{5.12}$$

Дефинираме пространството

$$\mathcal{W} = \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \times \mathcal{L}_2(-\infty, \infty),$$

и за  $w = (w_1, w_2) \in \mathcal{W}$  разглеждаме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 w_2(t) & t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 = \Psi_c(\mathbf{w}) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C} \mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Сега дефинираме оператор

$$\Lambda: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{L}_2[0, \infty), \quad \Lambda \mathbf{w} = \mathbf{z}.$$

За нашите цели ще дадем друго описание на този оператор  $\Lambda$ . Дефинираме оператор на конволюция

$$F: \mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \rightarrow \mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$$

с израза

$$F(u)(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau$$

И аналогично дефинираме  $F_2$  с  $B_2$  вместо  $B$ . Нека допълнително за  $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_2(-\infty, +\infty)$

$$P_+(z)(t) = \begin{cases} z(t), & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}, \quad P_-(z)(t) = \begin{cases} z(t), & \text{при } t < 0, \\ 0, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

С „ $\circ$ ” означаваме композиция на две изображения. Може да се провери, че

$$\Lambda \mathbf{w} = P_+ \circ F \circ P_- \mathbf{w} + P_+ \circ F_2 \circ P_+ \mathbf{w}_2. \tag{5.14}$$

Първото събираемо се нарича **оператор на Ханкел**, а второто събираемо се нарича **оператор на Тоеплиц**. Тези оператори са интересни сами по себе си, но тук ние ще се спрем само на онези техни свойства, които засягат  $\mathbf{H}_\infty$  теорията.

Ако системата  $(A, B)$  е управляема, от в сила са следните твърдения:

(а) Матрицата  $\mathbf{X}_c = \Psi_c \Psi_c^*$  е грамианът на управляемостта на  $(A, B)$  и е неособена.

(б) За  $\mathbf{x}_0 \in R^n$  дефинираме множеството

$$\{\mathbf{u} \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \mid \Psi_c(\mathbf{u}) = \mathbf{x}_0\}.$$

Тогава функцията  $\mathbf{u}_m = \Psi_c^* \mathbf{X}_c^{-1} \mathbf{x}_0$  принадлежи на това множество и е елементът, който минимизира нормата.

(в) Нормата на минимизиращия елемент е

$$\|\mathbf{u}_m\|_2^2 = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X}_c^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Вярно също е и твърдението, че ако  $X \in Ric(H)$  и  $\|G\|_\infty < 1$ , то

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} (\|\mathbf{z}(\mathbf{w})\|_2^2 - \|\mathbf{w}\|_2^2) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0.$$

Освен това, ако  $G(s)$  е определено с ур. (5.12), то  $\|\Lambda\| < 1$  е в сила тогава и само тогава, когато са изпълнени следните условия:

(i)  $\mathbf{H}_w \in dom(Ric)$  и  $\mathbf{W} = Ric(\mathbf{H}_w) \geq \mathbf{0}$  с

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}^T \mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}.$$

(ii)  $\rho(\mathbf{W} \mathbf{X}_c) < 1$ .

Нека сега да въведем **операторът на наблюдаемостта**

$$\Psi_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_2[0, \infty) \tag{5.15}$$

$$\Psi_o(\mathbf{x}_0) = \begin{cases} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, & \text{ако } t \geq 0, \\ \mathbf{0}, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Грамианът на наблюдаемостта е

$$\mathbf{X}_o = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau = \Psi_o^* \Psi_o.$$

Тогава първата сума в ур. (5.14), която е операторът на Ханкел, придобива вида

$$\Lambda_H = P_+ \circ F \circ P_-.$$

От тук следва, че операторът  $\Lambda_H$  може да се декомпозира по следния начин

$$\Lambda_H = \Psi_o \Psi_c.$$

Нека  $z(w) = z$  е изходът на следната система ( $\mathbf{A}$  е устойчива)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{w}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C} \mathbf{x},$$

с предавателна матрица  $\mathbf{G}(s)$  и функция на Хамилтон  $\mathbf{H}$  във вида:

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T \mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}.$$

Нека  $X = Ric(H)$  и да предположим, че  $\|G\|_\infty < 1$ . Тогава

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} (\|\mathbf{z}(\mathbf{w})\|_2^2 - \|\mathbf{w}\|_2^2) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0.$$

### 5.3.2. Теорема за пълната информация

Както в § 4.2.3, разглеждаме следната задача за пълната информация (ПИ):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Тогава

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Остават предположенията

$(A1')_{H^\infty}$   $(C_1, A)$  е откриваема.

$(A2')_{H^\infty}$   $(A, B_2)$  е стабилизируема.

$(A3')_{H^\infty}$   $D_{12}^T C_1 = 0$  и  $D_{12}^T D_{12} = I$ .

**Теорема за пълната информация.** Ако са изпълнени условия  $(A1')_{H^\infty}$ ,  $(A2')_{H^\infty}$ ,  $(A3)_{H^\infty}$ , то съществува допустимо управление на ПИ задачата с  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$  тогава и само тогава, когато е изпълнено следното условие:

$$\mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \quad \text{и} \quad \mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq \mathbf{0}.$$

Тогава управлението се дава с формулата

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{F}_\infty \quad \mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty.$$

### 5.4. Теорема за обратна връзка по изход

Отначало се разглежда задачата за предварително подаване на смущения (ПС), както в случая на  $\mathbf{H}_2$  оптималното управление (§ 4.2.3).

**Теорема за ПП задачата.** Ако за системата

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

матрицата  $A - C_1 B_2$  е устойчива, за да осигури вътрешна устойчивост, и са изпълнени условия  $(A1')_{H^\infty}$ ,  $(A2')_{H^\infty}$ ,  $(A3)_{H^\infty}$ , то съществува допустимо управление за ПП задачата

с  $\|F_{zw}\|_{\infty} < \gamma$  тогава и само тогава, когато е изпълнено условие (i) от теоремата за обратна връзка по изход, т.е.

$$(i) \quad \mathbf{H}_{\infty} \in \text{dom}(\text{Ric}) \quad \text{и} \quad \mathbf{X}_{\infty} = \text{Ric}(\mathbf{H}_{\infty}) \geq \mathbf{0}.$$

и управлението се дава във вида

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_{\infty} - \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{F}_{\infty} & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

След това се разглежда **задачата за  $\mathbf{H}_{\infty}$  оценка по изход (ОИ)**, т.е.  $\mathbf{H}_{\infty}$  задачата за техническата система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

при следните предположения

$(A1'')$  $_{H_{\infty}}$   $(A, B_1)$  е стабилизираща и  $A - B_2 C_1$  е устойчива.

$(A2'')$  $_{H_{\infty}}$   $(C_2, A)$  е откриваема.

$(A4)_{H_{\infty}}$   $B_1 D_{21} = 0$  и  $D_{21} D_{21}^T = I$ .

Взема се предвид, че ОИ задачата е дуална на ПП задачата (§ 4.2.3), чиято система в случая се дава с уравненията

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^T \mathbf{x} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{w} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{B}_1^T \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}_2^T \mathbf{x} + \mathbf{u}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

а решението ѝ се осигурява от теоремата за ПП задачата. Това води до теоремата за оценка по изход (ОИ).

**Теорема за ОИ задачата.** Ако за системата (5.16) са изпълнени условия  $(A1'')$  $_{H_{\infty}}$ ,  $(A2'')$  $_{H_{\infty}}$ ,  $(A4)_{H_{\infty}}$ , то съществува допустимо управление за ОИ задачата с  $\|F_{zw}\|_{\infty} < \gamma$  тогава и само тогава, когато е изпълнено условието **(ii)** на теоремата за ПИ задачата, т.е.

$$(ii) \quad J_{\infty} \in \text{dom}(\text{Ric}) \quad \text{и} \quad Y_{\infty} \in \text{Ric}(J_{\infty})$$

и съответното управление се дава с формулата

$$\mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{L}_{\infty} \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}_{\infty} \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Накрая разглеждаме системата

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}.$$

Това е така наречената задача за **пълно управление** (ПУ). Тя е дуална на ПИ задачата и обратно. Управлението  $\mathbf{K}$  за ПИ задачата дава също управление за ПУ задачата:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{y}.$$

### 5.5. Обща $H_\infty$ задача: скалиране и отместване на веригата

Тук ще се спрем на възможностите да отслабим предположения  $(A1)_{H_\infty} - (A5)_{H_\infty}$ . Първо ще отбележим, че стабилизируемостта на  $(A, B_1)$  и откриваемостта на  $(C_1, A)$  не са задължително, но ако тези условия се премахнат, то трябва да бъдат добавени две предположения относно инвариантните нули на двете подсистеми. Също е възможно да бъдат премахнати и съотношенията за ортогоналност в  $(A3)$  и  $(A4)$ . Така стигаме до по-слаби предположения:

$(A1')_{H_\infty}$   $(A, B_2)$  е стабилизируема и  $(C_2, A)$  е откриваема.

$(A2')_{H_\infty}$  Следната матрица има пълен ранг по стълбове за всяко  $\omega$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix}.$$

$(A3')_{H_\infty}$  Следната матрица има пълен ранг по редове за всяко  $\omega$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - i\omega\mathbf{I} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix}.$$

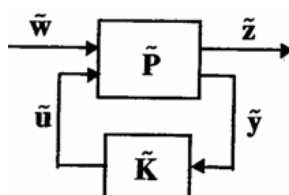
$$(A4^*) \quad \mathbf{D}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_{21} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{I}).$$

$$(A5) \quad \mathbf{D}_{11} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}.$$

Предположение  $(A4^*)$  може да бъде изпълнено чрез така нареченото **скалиране** и се изпълнява заради процедурата за отместване на веригата. Скалирането изисква следното условие

$(A4')_{H_\infty}$   $D_{12}$  има пълен ранг по стълбове и  $D_{21}$  има пълен ранг по редове.

**Скалиране.** Разглеждаме веригата по обратна връзка на Фиг.5.5.



Фигура 5.5. Нескалирана обратна връзка

чиято реализация ще означаваме както следва

$$\tilde{\mathbf{P}}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}}_1 & \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ \hline \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{D}}_{11} & \tilde{\mathbf{D}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 & \tilde{\mathbf{D}}_{21} & \tilde{\mathbf{D}}_{22} \end{array} \right). \quad (5.18)$$

Предполагаме, че  $\tilde{\mathbf{D}}_{12}$  има пълен ранг по стълбове и  $\tilde{\mathbf{D}}_{21}$  има пълен ранг по редове. Лесно се вижда, че може да се направи следната декомпозиция по сингулярни стойности

$$\tilde{\mathbf{D}}_{12} = \mathbf{U}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{R}_1, \quad \tilde{\mathbf{D}}_{21} = \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{U}_2,$$

с реални унитарни матрици  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  и реални обратими матрици  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ . Въвеждаме следните променливи

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{U}_1 \mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{U}_2^T \mathbf{w}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{R}_2 \mathbf{y}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_1 \mathbf{u}$$

и определяме нова техническа система и ново управление

$$\mathbf{P}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{R}_1 \tilde{\mathbf{K}}(s) \mathbf{R}_2.$$

Като използваме формулите от § 2.2.1. за представяне на предавателни матрици в пространството на състоянията, получаваме представяне на  $\mathbf{P}(s)$  с  $\mathbf{D}_{12}$  и  $\mathbf{D}_{21}$  във вида  $(\mathbf{A}\mathbf{4}^*)_{H_\infty}$ . Тъй като  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  са унитарни, трансформацията запазва нормите

$$\|\mathcal{F}_l(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{K}})\|_\infty = \|\mathbf{U}_1 \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}) \mathbf{U}_2\|_\infty = \|\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty.$$

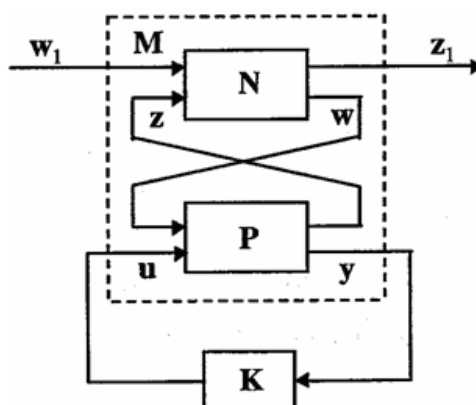
Така имаме възможност да заместим техническата система  $\tilde{\mathbf{P}}$  с  $\mathbf{P}$  преди да изпълним  $H_\infty$  оптимизацията. След оптимизационния процес управлението за  $\mathbf{P}$  трябва да бъде трансформирана обратно.

Оставащите и възможно ограничаващи предположения са  $\mathbf{D}_{11} = 0$  и  $\mathbf{D}_{22} = 0$ . Ще разгледаме възможностите те да бъдат отстранени. За да отстраним ограничението  $\mathbf{D}_{22} = 0$ , нека отначало  $\mathbf{K}$  е управление за техническата система  $\mathbf{P}$  с  $\mathbf{D}_{22} = 0$ . Тогава съответното управление за оригиналната техническа система, в която  $\mathbf{D}_{22} \neq 0$ , се дава с израза  $\mathbf{K}(\mathbf{I} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{K})^{-1}$ .

Отстраняването на предположението  $D_{11} = 0$  е по сложно и изисква процедура наречена отместване на веригата.

**Отместване на веригата.** Нека започнем с техническа система от вида

$$P(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_2 & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (5.19)$$



**Фигура 5.6.** Отместване на веригата

и да представим  $D_{11}$  в  $2 \times 2$  блок-матрица

$$D_{11} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{pmatrix}.$$

Техническата система ще се разшири както е показано на Фиг.5.6. Техническата система  $M$ , която има коефициент  $D_{M11}$ , е съставена от  $P$  и  $N$ . Тук  $N$  е постоянна предавателна функция

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}.$$

Целта е  $N$  да се конструира по такъв начин, че  $D_{M11}$  да стане нула. По принцип нормата на обратната връзка на  $M$  и  $K$  е различна от нормата на обратната връзка на  $P$  и  $K$ . Но ние се стремим изменението на техническата система да не се отрази на субоптимальността с същото  $\gamma$ . Нека за простота вземем нормализирано  $\gamma = 1$ . Искаме да имаме следната ситуация

$$\begin{array}{ll} \mathbf{K} \text{ стабилизира } \mathbf{P} \text{ вътрешно} & \mathcal{F}_1(\mathbf{P}, \mathbf{K}) \text{ стабилизира } \mathbf{N} \\ \text{и } \|\mathcal{F}_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})\|_\infty < 1 & \Leftrightarrow \text{вътрешно} \\ & \text{и } \|\mathcal{F}_1(\mathbf{N}, \mathcal{F}_1(\mathbf{P}, \mathbf{K}))\|_\infty < 1 \end{array}$$

Това е вярно, ако  $\mathbf{N}$  е ортонормална и ако  $\mathbf{N}_{21}$  е неособена.

Да предположим, че  $\|D_{11}\| < 1$  и да изберем

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -\mathbf{D}_{11} & \tilde{\mathbf{R}}^{1/2} \\ \mathbf{R}^{1/2} & \mathbf{D}_{11}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{11}^T \mathbf{D}_{11}, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_{11} \mathbf{D}_{11}^T.$$

Тъй като  $N_{12} = \tilde{R}^{1/2}$  и  $N_{21} = R^{1/2}$  са неособени, то  $\mathbf{N}$  се явява ортогонална и в частност

$$\tilde{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{11} \mathbf{R}^{1/2}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{M11} &= -\mathbf{D}_{11} + \tilde{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{D}_{11} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}^{1/2} = -\mathbf{D}_{11} + \tilde{\mathbf{R}}^{1/2} \mathbf{D}_{11} \mathbf{R}^{-1/2} \\ &= -\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{R}^{-1/2} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Трябва да се осигури допълнително неравенството  $\|D_{11}\| < 1$ . За тази цел заместваем техническата система  $\mathbf{P}$  с техническа система  $\tilde{\mathbf{P}}$

$$\tilde{\mathbf{P}}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_\infty \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_\infty \mathbf{D}_{21} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_\infty \mathbf{C}_2 & \tilde{\mathbf{D}}_{11} & \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_2 & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \tilde{\mathbf{D}}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{1111} & \mathbf{D}_{1112} \\ \mathbf{D}_{1121} & \mathbf{D}_{1122} + \mathbf{D}_\infty \end{pmatrix}.$$

за която

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \mathcal{F}_i(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{K}}).$$

и чиято  $D_{11}$ -матрица  $D_{\tilde{P}11}$  има норма по малка от 1  $\|D_{\tilde{P}11}\| < 1$ , Това може да се постигне чрез въвеждането на ново управление

$$\tilde{\mathbf{K}}(s) = \mathbf{K}(s) - \mathbf{D}_\infty, \tag{5.20}$$

където

$$\mathbf{D}_\infty = -\mathbf{D}_{1122} - \mathbf{D}_{1121} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{1111}^T \mathbf{D}_{1111})^{-1} \mathbf{D}_{1111}^T \mathbf{D}_{1112}. \tag{5.21}$$

Нека е дадена обща техническа система

$$\mathbf{P}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right)$$

и са изпълнени условия  $(A1)_{H^\infty}$  –  $(A4)_{H^\infty}$  и  $(A5)_{H^\infty}$ . Процедурата на скалиране и за отнемване на веригата може да се обобщи по следния начин:

*Стъпка 1:* Полагаме  $D_{22} = 0$  и пресмятаме след синтеза управление за  $D_{22} \neq 0$ .

*Стъпка 2:* Скалираме техническата система, така че да придобие вида (5.19).

Стъпка 3: Пресмятаме нова техническа система  $\tilde{P}$  в смисъл на  $D_\infty$  (ур. (5.21)) и прилагаме процедурата на отнемване на веригата за  $\tilde{P}$ .

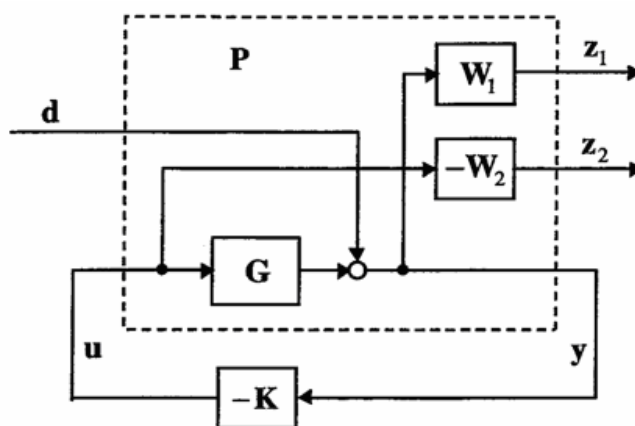
Стъпка 4: Получената техническа система  $\mathbf{M}$  в Стъпка 3 има  $D_{22} \neq 0$ . Ако се положи  $D_{22} = 0$ , се оказва възможно да се пресметнат допълнителни формули за всички субоптимални управления  $\tilde{K}$  за  $\mathbf{M}$ , т.е. всички субоптимални управления  $\mathbf{K}$  за  $\mathbf{P}$  [41].

### 5.6. Синтез на смесена чувствителност

При синтезиране на  $H_\infty$  управление, е необходимо да разширим оригиналната техническа система  $\mathbf{G}$ , която е математическият модел на физическата, система с тегла. Тези тегла съдържат целите на синтеза. Разширената техническа система се означава с  $\mathbf{P}$ . Функциите, които могат да бъдат формирани са всичките преносни функции, спадащи към веригата на обратната връзка.

Ако  $S_o$  и  $\mathbf{K}S_o$  трябва да бъдат формирани, то  $\mathbf{P}$  е (Фиг.5.7)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{W}_1\mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{W}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$



Фигура 5.7. Оптимизация по S/KS смесена чувствителност

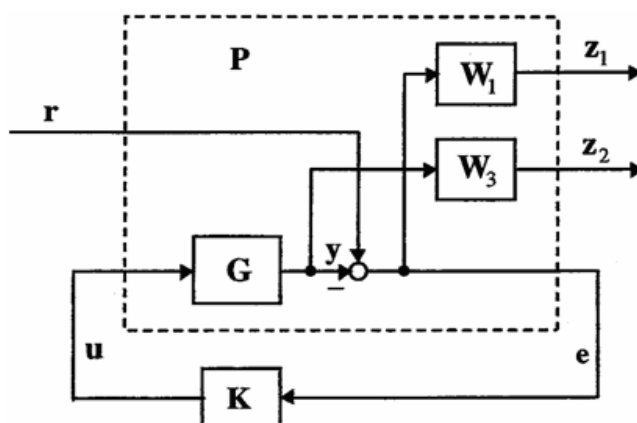
Предавателната функция на затворената верига е

$$\mathcal{F}_T(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1\mathbf{S}_o \\ \mathbf{W}_2\mathbf{K}\mathbf{S}_o \end{pmatrix}.$$

Друга възможност е да се формира функцията на чувствителността  $S_o$  и функцията на допълнителната чувствителност  $T_o$  (Фиг.5.8). тогава теглото  $W_1$  има за

вход грешката на управлението  $\hat{e} = S_o \hat{r}$ . Аналогично входът на теглото  $W_3$  е измерването  $\hat{y} = T_o \hat{r}$ . Разширената техническа система е

$$P = \begin{pmatrix} W_1 & -W_1 G \\ 0 & W_3 G \\ I & -G \end{pmatrix}$$



Фигура 5.8. Управление по S/T смесена чувствителност

и предавателната матрица на затворената верига е

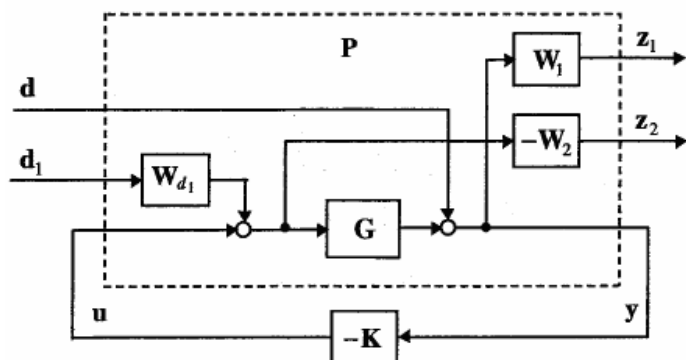
$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{pmatrix} W_1 S_o \\ W_3 T_o \end{pmatrix}.$$

Възможно е комбинирането и на двата подхода. В този случай предавателната матрица на затворената верига има вида

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{pmatrix} W_1 S_o \\ W_2 K S_o \\ W_3 T_o \end{pmatrix}.$$

Често се налага да се построят тегла за предавателната матрица  $S_o G$ . Това изисква допълнително смущение при входа на техническата система (Фиг.5.9). Предавателната функция на затворената верига сега е

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{pmatrix} W_1 S_o & W_1 S_o G W_{d1} \\ W_2 K S_o & -W_2 S_o W_{d1} \end{pmatrix}.$$



**Фигура 5.9.** Управление по S/KS смесена чувствителност със смущение при входа

## 6. $H_\infty$ оптимално управление – ЛМН подход и приложения

В тази глава ще разгледаме  $H_\infty$  оптималното управление с друг подход. Отправната точка тук е начинът, по който характеризираме свойството  $\|G\|_\infty < 1$  за предавателна матрица  $G$ . Тук използваме линейни матрични неравенства (ЛМН). Идеята за решаване на  $H_\infty$  оптималното управление е следната. Характеризираме предавателната функция на затворената верига  $F_{zw}$  с ЛМН, за да опишем субоптималните управления. При тази процедура проблемът е, че характеризирането не е изпъкнало, което е изискване при формулирането на необходими и достатъчни условия за оптималност. Налага се известна изобретателност при прилагане на алгебрата, за да бъде дадено изпъкнало характеризиране чрез три ЛМН.

За нашите цели получаваме някои свойства на  $H_\infty$  оптималните управления. Сравняваме условията за оптималност на Рикати и ЛМН подходите. Две от трите ЛМН кореспондират с уравненията на Рикати за  $X_\infty$  и  $Y_\infty$ , а третото неравенство съответства на условието  $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$ . След това се анализира граничното поведение на субоптималните управления при  $\gamma \rightarrow \gamma_{opt}$ . Разглежда се задачата за синтез на ЛМН управление в случая, когато полюсите на затворената верига трябва да лежат в предварително зададена област. С ЛМН метода се получи теоретично потвърждаване на табулирането на коефициенти, което е обикновена практика при класическото управление. Представени са числени изследвания за система от втори ред, при които се демонстрира изборът и влиянието на теглата при  $H_\infty$  синтеза.

### 6.1. Характеризиране на $H_\infty$ субоптималните управления чрез ЛМН

#### 6.1.1. Гранична лема

**Лема (допълнение на Шур).** Нека  $Q$ ,  $M$  и  $R$  са реални или комплексни матрици и нека  $Q$  и  $M$  са самоспрегнати. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

$$(i) \quad Q > 0 \quad \text{и} \quad M - RQ^{-1}R^* > 0. \quad (\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Q & R^* \\ R & M \end{pmatrix} > 0)$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} M & R \\ R^* & Q \end{pmatrix} > 0.$$

**Гранична реална лема.** За произволна предавателна функция от вида

$$\mathbf{G}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (6.1)$$

са еквивалентни следните твърдения:

(i)  $\mathbf{A}$  е устойчива и  $\|\mathbf{G}\|_{\infty} < 1$

(ii) Съществува симетрична матрица  $\mathbf{X}$  такава, че

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} & \mathbf{X} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \mathbf{D} & & \\ & & & \\ \hline \mathbf{D}^T \mathbf{C} + \mathbf{B}^T \mathbf{X} & \mathbf{D}^T \mathbf{D} - \mathbf{I} & & \end{array} \right) < \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

### 6.1.2. Неизпъкнало характеризирание на $H_{\infty}$ субоптималните управления

Прилагаме Граничната лема към система със затворена верига. При тази стъпка се получава неизпъкнало матрично неравенство (6.2). Търсим начин да го заменим с множество от изпъкнали матрични неравенства.

Нека са дадени техническа система  $\mathbf{P}$  и управление  $\mathbf{K}$  със следното представяне в пространството на състоянията

$$\mathbf{P}(s) = \left( \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right), \quad \mathbf{K}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{array} \right).$$

$\mathbf{A}$  е  $n \times n$  матрица,  $\mathbf{A}_k$  е  $n_k \times n_k$  матрица. На матриците  $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{21}$  не са наложени ограничения. Системата с обратна връзка има следното представяне в пространството на състоянията:

$$\mathbf{F}_{zw} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{21} \\ \hline \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \end{array} \right).$$

Нека матрицата на управлението има вида

$$\mathbf{J} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{array} \right).$$

и да въведем означенията

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1e} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2e} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{2e} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{21e} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{1e} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}), \quad \mathbf{D}_{12e} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{D}_{12}).$$

Тогава матрицата на системата с обратна връзка може да бъде параметризирана чрез членовете на  $\mathbf{J}$  по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= \mathbf{A}_e + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{J} \mathbf{C}_{2e}, & \mathbf{B}_c &= \mathbf{B}_{1e} + \mathbf{B}_{2e} \mathbf{J} \mathbf{D}_{21e} \\ \mathbf{C}_c &= \mathbf{C}_{1e} + \mathbf{D}_{12e} \mathbf{J} \mathbf{C}_{2e}, & \mathbf{D}_c &= \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12e} \mathbf{J} \mathbf{D}_{21e}. \end{aligned}$$

Зависимостта от  $\mathbf{J}$  е афинна. Предавателната матрица на затворената система е

$$\mathbf{F}_{zw}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{array} \right). \quad (6.3)$$

Следващата стъпка е да приложим Граничната лема към тази система с обратна връзка. За простота приемаме, че  $\gamma$  е нормализирано, т.е.  $\gamma = 1$ .

Следните твърдения са еквивалентни

(1)  $A_c$  е устойчива и  $\|F_{zw}\|_{\infty} < 1$ .

(2) Съществува матрица  $Z > 0$  такава, че

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c & \mathbf{Z} \mathbf{B}_c & \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T \mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Чрез декомпозиция по сингулярни стойности се показва, че ако  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  са матрици с линейно независими стълбове, то за всяка матрица  $\mathbf{Y}$  съществува матрица  $\mathbf{J}$  такава, че

$$\mathbf{P}^T \mathbf{J} \mathbf{Q} = \mathbf{Y}.$$

Ако  $\mathbf{H}$  е симетрична матрица, то съществува матрица  $\mathbf{Y}$  такава, че

$$\mathbf{H} + \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T < \mathbf{0}.$$

Така за  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  с линейно независими стълбове получаваме неравенството

$$\mathbf{H} + \mathbf{P}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{J} \mathbf{P} < \mathbf{0}.$$

Нека  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{H}$  са дадени матрици и  $\mathbf{H}$  е симетрична. Предполагаме, че матриците  $N_p$  и  $N_Q$  имат пълен ранг и удовлетворяват следните условия

$$\text{Im } N_p = \text{Ker } \mathbf{P}, \quad \text{Im } N_Q = \text{Ker } \mathbf{Q}.$$

Тогава съществува матрица  $\mathbf{J}$ , удовлетворяваща неравенството

$$\mathbf{H} + \mathbf{P}^T \mathbf{J}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{J} \mathbf{P} < \mathbf{0} \quad (6.5)$$

тогава и само тогава, когато

$$\mathbf{N}_p^T \mathbf{H} \mathbf{N}_p < \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_Q^T \mathbf{H} \mathbf{N}_Q < \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

От тук лесно може да се провери, че следните твърдения са еквивалентни

(1)  $A_c$  е устойчива и  $\|F_{zw}\|_\infty < 1$ .

(2) Съществува матрица  $Z > 0$  такава, че

$$\mathbf{N}_{P_2}^T \mathbf{H}_Z \mathbf{N}_{P_2} < \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_Q^T \mathbf{H}_Z \mathbf{N}_Q < \mathbf{0}.$$

За матриците

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2e}^T & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12e}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_Z = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_e \mathbf{Z}^{-1} + \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{A}_e^T & \mathbf{B}_{1e} & \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C}_{1e}^T \\ \mathbf{B}_{1e}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1e} \mathbf{Z}^{-1} & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

следните твърдения са еквивалентни

(1)  $A_c$  е устойчива и  $\|F_{zw}\|_\infty < 1$ .

(2) Съществува симетрична матрица  $Z > 0$ , за която

$$\mathbf{N}_P^T \mathbf{F}_Z \mathbf{N}_P < \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{N}_Q^T \mathbf{H}_Z \mathbf{N}_Q < \mathbf{0} \tag{6.7}$$

### 6.1.3. Изпълнено характеризирание на $H_\infty$ субоптималните управления

Матрицата  $Z$  в твърдение (6.2) е симетрична, положително определена и има размерност  $(n + n_k) \times (n + n_k)$ . Записваме  $Z$  и  $Z^{-1}$  във вида

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{X}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_2^T & \mathbf{Y}_3 \end{pmatrix},$$

с  $n \times n$  матрици  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ .

Нека  $N_o$  и  $N_c$  са две матрици с пълен ранг, за които

$$\text{Im } N_o = \text{Ker}(\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{21}), \quad \text{Im } N_c = \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{D}_{12}^T).$$

Тогава неравенствата (6.7) са еквивалентни на неравенствата

$$\begin{pmatrix} N_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} N_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

Ако  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  са симетрични положително определени  $n \times n$  матрици, то съществуват  $n \times n_K$  матрици  $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2$  и симетрични  $n_K \times n_K$  матрици  $\mathbf{X}_3, \mathbf{Y}_3$  такива, че

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{X}_3 \end{pmatrix} > \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{X}_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Y}_2 \\ \mathbf{Y}_2^T & \mathbf{Y}_3 \end{pmatrix}$$

тогава и само тогава, когато

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \leq n + n_K. \quad (6.8)$$

**Теорема (Съществуване).** Съществува стабилизиращо управление, такова че

$$\|\mathbf{F}_{zw}\|_{\infty} < 1 \quad (6.9)$$

тогава и само тогава, когато съществуват симетрични матрици  $\mathbf{X} > \mathbf{0}$  и  $\mathbf{Y} > \mathbf{0}$ , за които са изпълнени следните ЛМН

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_o & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (6.10)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (6.11)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (6.12)$$

Тук матриците  $\mathbf{N}_o$  и  $\mathbf{N}_c$  имат пълен ранг и

$$\text{Im } \mathbf{N}_o = \text{Ker}(\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{21}), \quad \text{Im } \mathbf{N}_c = \text{Ker}(\mathbf{B}_2^T \quad \mathbf{D}_{12}^T).$$

**Теорема (Синтез).** Нека  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  са симетрични положително определени матрици и нека  $\mathbf{X}_2$  е  $n \times n$  матрица, която изпълнява условието

$$\mathbf{X} - \mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_2^T \geq \mathbf{0}$$

Нека  $\mathbf{Z}$  е матрица със следния вид

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

и нека  $\mathbf{J}$  е решение на следното ЛМН

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c^T \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c & \mathbf{Z} \mathbf{B}_c & \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T \mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (6.13)$$

Тогава  $\mathbf{J}$  е стабилизиращо управление, при което  $A_c$  е устойчива и  $\|F_{zw}\|_\infty < 1$ .

## 6.2. Свойства на $H_\infty$ субоптималните управления

### 6.2.1. Връзка между подходите на Рикати и ЛМН

Нека са изпълнени следните условия на Основната теорема за обратна връзка по изходи (§ 5.4)

$$(A3)_{H_\infty} \quad D_{12}^T C_1 = 0 \text{ и } D_{12}^T D_{12} = I.$$

$$(A4)_{H_\infty} \quad B_1 D_{21}^T = 0 \text{ и } D_{21} D_{21}^T = I.$$

$$(A5)_{H_\infty} \quad D_{11} = 0 \text{ и } D_{22} = 0$$

Тогава имаме

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_{12}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

и можем да изберем

$$\mathbf{N}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_\perp \end{pmatrix}.$$

Като се изпълнят действията в ур. (6.11) се получава неравенството

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_\perp & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_\perp^T \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}.$$

Използвайки, че  $D_\perp D_\perp^T = I - D_{12} D_{12}^T$  и допълнението на Шур получаваме условието във вида

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T + \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T < \mathbf{0}.$$

Ако положим  $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y}^{-1}$ , неравенството придобива вида

$$\mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{X}} (\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T) \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 < \mathbf{0}. \quad (6.14)$$

Ако положим  $\hat{Y} = X^{-1}$ , неравенство (III.6.10) придобива вида

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{A}^T + \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2)\tilde{\mathbf{Y}} + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T < \mathbf{0} \quad (6.15)$$

Използвайки уравнението

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} - \mathbf{X}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

лесно се вижда, че неравенство (6.12) е еквивалентно на

$$\rho(\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}}) \leq 1. \quad (6.16)$$

Ако допълнително са изпълнени условия

(A1)<sub>H $\infty$</sub>  (A, B<sub>1</sub>) е стабилизируема и (C<sub>1</sub>, A) е откриваема.

(A2)<sub>H $\infty$</sub>  (A, B<sub>2</sub>) е стабилизируема и (C<sub>2</sub>, A) е откриваема.

на основната теорема за обратна връзка по изхода, то е възможно да се покаже, че ако са решими ЛМН (6.10) – (6.12), то са в сила нейните условията

(i)  $\mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq \mathbf{0}$ ;

(ii)  $\mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$  и  $\mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq \mathbf{0}$ ;

(iii)  $\rho(\mathbf{X}_\infty\mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$ .

(които водят до  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$ ) и обратно.

### 6.2.2. Ограничение в поведението

Числото  $\gamma_{opt}$  се определя като точната долна граница на всички  $\gamma$ , за които съществува допустимо управление с  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$ . В този параграф обръщаме внимание на това какво става, когато  $\gamma$  клони към  $\gamma_{opt}$ . Според теоремата за обратна връзка по изхода, ако са изпълнени условия (A1)<sub>H $\infty$</sub>  – (A5)<sub>H $\infty$</sub> , то  $\gamma_{opt}$  се характеризира еквивалентно като точната долна граница на всички  $\gamma$ , за които са изпълнени условия (i) – (iii) на същата теорема. Едно оптимално управление е допустимо управление, за което  $\|F_{zw}\|_\infty = \gamma_{opt}$ . За едно оптимално управление поне едно от условията (i) – (iii) не е изпълнено.

Първо ще се спрем на случая, когато при  $\gamma$  клонящо към  $\gamma_{opt}$  не е изпълнено условие (iii). С други думи, условия (i) и (ii) са изпълнени, но  $\rho(\mathbf{X}_\infty\mathbf{Y}_\infty) = \gamma^2$ . Тъй като  $\mathbf{X}_\infty\mathbf{Y}_\infty$  има само неотрицателни собствени стойности, то матрицата

$$\mathbf{I} - \gamma_{opt}^2 \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty \quad (6.17)$$

е особена. Представянето на субоптималното управление от теоремата за обратната връзка по изход не съществува. В този случай като използваме уравнението на Рикати за  $X_\infty$  получаваме субоптималното управление във вида

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \gamma^2 \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}}_\infty \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{L}_\infty \mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{F}_\infty \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 + \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1.$$

Ур. (6.18) е вярно и за граничния случай  $\gamma = \gamma_{opt}$ . Тъй като матрицата (6.17) е особена, поне едно от състоянията на управлението може да бъде елиминирано, т.е. оптималното управление е най-много от ред  $n-1$ , което е ограничение в поведението.

Нека разгледаме случая, когато при  $\gamma$  клонящо към  $\gamma_{opt}$  не са изпълнени условия **(i)** или **(ii)**. Достатъчно е да се спрем на случая, когато условие **(i)** се нарушава преди да се наруши условие **(iii)**. Може да се докаже, че условията  $X_\infty \geq 0$  и  $Y_\infty \geq 0$  не могат да се нарушат преди **(iii)**. С други думи при нарушаването на условие **(i)**,  $\mathbf{H}_\infty$  не е елемент на  $dom(Ric)$  защото тази матрица или не е устойчива или не притежава допълнителното свойство.

Ако  $\mathbf{H}_\infty$  не е устойчива, то  $\mathbf{H}_\infty \notin dom(Ric)$ . При все това е възможно операторът на Рикати да бъде разширен и да бъде получено решение  $X_\infty$  за  $\gamma = \gamma_{opt}$ . Тогава управлението  $u = -B_2^T X_\infty x$  стабилизира техническата система и осигурява  $\|F_{zw}\|_\infty = \gamma_{opt}$ . Може да се покаже, че ако първо се нарушава устойчивостта, то точната долна граница по всички стабилизиращи управления е равна на точната долна граница по всички управления.

Ако първо се нарушава допълнителното свойство за  $\mathbf{H}_\infty$  при  $\gamma = \gamma_{opt}$ , то  $\mathbf{H}_\infty \in dom(Ric)$  за  $\gamma < \gamma_{opt}$  и управлението  $u = -B_2^T X_\infty x$  е определено и дава  $\|F_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Но това управление не е стабилизиращо. Ако първо се нарушава допълнителното свойство, но свойство **(iii)** е изпълнено, то все още може да се получи формула за оптималното управление. Ако условие **(iii)** не е изпълнено или не се появява (ПИ задача), от може да се окаже, че не съществува оптимално управление.

### 6.3. $\mathbf{H}_\infty$ синтез с ограничение за разполагането на полюсите

#### 6.3.1. ЛМН области

Ще разгледаме случая, когато  $\mathbf{H}_\infty$  синтеза следва да се извърши при допълнителното условие полюсите на затворената верига да лежат в определена област. За да може да се приложи ЛМН подхода, тези области трябва да имат определена структура.

Едно подмножество  $\mathcal{D}$  в отворената лява полуравнина ще наричаме *ЛМН област*, ако съществува симетрична  $m \times m$  матрица  $\mathbf{L} = (\lambda_{kl})$  и произволна  $m \times m$  матрица  $\mathbf{M} = (\mu_{kl})$  такива, че

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathbf{L} + z\mathbf{M} + \bar{z}\mathbf{M}^T < \mathbf{0} \}.$$

Матричната функция

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \mathbf{L} + z\mathbf{M} + \bar{z}\mathbf{M}^T \quad \text{или} \quad f_{\mathcal{D}}(z) = (\lambda_{kl} + \mu_{kl}z + \mu_{lk}\bar{z}).$$

ще наричаме *характеристична функция на  $\mathcal{D}$* .

Типични области за полюсите на затворената верига са

$$\mathcal{D}_1 = \{ z \mid \operatorname{Re} z < -\alpha \} \quad \alpha > 0, \quad (\text{полу равнина}),$$

$$\mathcal{D}_2 = \{ z \mid \operatorname{Re} z < 0, \frac{|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Re} z|} < \tan \theta \} \quad 0 \leq \theta < \pi/2 \quad (\text{коничен сектор}),$$

с характеристични функции

$$f_{\mathcal{D}_1}(z) = 2\alpha + z + \bar{z},$$

$$f_{\mathcal{D}_2}(z) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \bar{z}.$$

ЛМН областите са изпъкнали и симетрични относно реалната ос. Сечението на две ЛМН области е отново ЛМН област.

Една матрица  $\mathbf{A}$  се нарича  *$\mathcal{D}$  - устойчива*, ако всички нейни собствени стойности лежат в  $\mathcal{D}$ . В този смисъл е определена и  $\mathcal{D}$  - устойчивостта на линейни системи. Ако  $\mathcal{D}$  е цялата отворена лява полуравнина, то  $\mathcal{D}$  - устойчивостта съвпада с обикновената устойчивост. Знаем, че  $\mathbf{A}$  е устойчива тогава и само тогава, когато съществува симетрична матрица  $\mathbf{X} > 0$ , за която

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T < \mathbf{0}.$$

Дефинираме  $m \times m$  блок матрица

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = (\lambda_{kl}\mathbf{X} + \mu_{kl}\mathbf{A}\mathbf{X} + \mu_{lk}\mathbf{X}\mathbf{A}^T).$$

Ако  $\mathcal{D}$  е отворената лява полуравнина, то матрицата съдържа само един блок и има вида

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T.$$

За коничен сектор тази матрица е

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sin \theta (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T) & \cos \theta (\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{A}^T) \\ \cos \theta (-\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T) & \sin \theta (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T) \end{pmatrix}.$$

Според критерия на Ляпунов за устойчивост, матрицата  $\mathbf{A}$  е устойчива тогава и само тогава, когато съществува симетрична матрица  $\mathbf{X} > \mathbf{0}$  такава, че  $\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) < \mathbf{0}$ . Този резултат се обобщава за обща  $\mathcal{D}$ -устойчивост за ЛМН области по следния начин: [69]

**Теорема.** Матрицата  $\mathbf{A}$  е  $\mathcal{D}$ -устойчива тогава и само тогава, когато съществува симетрична матрица  $\mathbf{X} > \mathbf{0}$  такава, че

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{X}) < \mathbf{0}. \quad (6.19)$$

### 6.3.2. Синтез на $\mathcal{D}$ -устойчиви $\mathbf{H}_{\infty}$ оптимални управления

Прилагаме теоремата за  $\mathcal{D}$ -устойчивост към системната матрица на веригата с обратна връзка и комбинираме с  $\mathbf{H}_{\infty}$  синтез чрез ЛМН. Отначало разглеждаме случая на обратна връзка по състояния

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}.$$

Системата с обратна връзка има вида

$$\mathbf{F}_{zw} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{D}_{11} \end{array} \right).$$

В случая искаме системната матрица  $\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}$  да бъде  $\mathcal{D}$ -устойчива. Ур. (6.19) е еквивалентно на съществуването на симетрична матрица  $\mathbf{Z} > \mathbf{0}$ , за която

$$(\lambda_{ki}\mathbf{Z} + \mu_{ki}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})\mathbf{Z} + \mu_{ik}\mathbf{Z}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})^T) < \mathbf{0}.$$

Поради умножаването на  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{F}$ , теоремата за  $\mathcal{D}$ -устойчивост води до неизпъкнали условия за тези променливи. Затова нека въведем нова променлива

$$\mathbf{W} = \mathbf{Z}\mathbf{F}.$$

вместо променливата  $\mathbf{F}$ . За променливите  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{F}$  условията са изпъкнали и спрямо тях можем да изкажем условията за синтез на управление.

Закон за обратна връзка във вида  $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ , за който полюсите на затворената верига лежат в  $\mathcal{D}$ , съществува тогава и само тогава, когато съществува симетрична матрица  $\mathbf{Z} > \mathbf{0}$  и матрица  $\mathbf{W}$ , за които

$$(\lambda_{ki}\mathbf{Z} + \mu_{ki}(\mathbf{AZ} + \mathbf{B}_2\mathbf{W}) + \mu_{ik}(\mathbf{ZA}^T + \mathbf{W}^T\mathbf{B}_2^T)) < \mathbf{0}. \quad (6.20)$$

В този случай постоянната матрица  $\mathbf{F}$  има вида

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}.$$

За да се обедини този начин на разполагане на полюсите с  $\mathbf{H}_{\infty}$  оптимизацията, преписваме условие (6.4) в еквивалентно неравенство

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_c \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{A}_c^T & \mathbf{B}_c & \mathbf{Z} \mathbf{C}_c^T \\ \mathbf{B}_c^T & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_c^T \\ \mathbf{C}_c \mathbf{Z} & \mathbf{D}_c & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}. \quad (6.21)$$

и прилагаме техниката, описана по-горе за построяване на  $\mathbf{H}_\infty$  оптимално управление.

По-нататък преминаваме към случая на  $\mathbf{H}_\infty$  обратна връзка по изходи (ОИ). В този случай направената при обратна връзка по състояния смяна на променливи не е приложима и се използва друг подход. При разглежданията тук предполагаме, че  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ , което не е ограничение.

Разглеждаме управлението

$$\mathbf{K} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K & \mathbf{B}_K \\ \hline \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_K \end{array} \right). \quad (6.22)$$

от ред  $n$ . Въвеждаме параметризация на управлението. Нека  $\mathbf{Z}$  е матрица на Ляпунов и

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2^T & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y} & -\mathbf{Y} \mathbf{X}_2 \\ -\mathbf{X}_2^T \mathbf{Y} & \mathbf{X}_2^T \mathbf{Y} \mathbf{X}_2 + \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Нека въведем променливата  $\mathbf{Y}_2 = -\mathbf{Y} \mathbf{X}_2$  и чрез нея да въведем следните променливи на управлението:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_K &= \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_K + \mathbf{Y} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \\ \mathbf{C}_K &= \mathbf{C}_K \mathbf{X}_2^T + \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \mathbf{X} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}_K \mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y}_2 \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{Y} \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K \mathbf{X}_2^T + \mathbf{Y} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2) \mathbf{X}. \quad (6.24)$$

И освен това нека въведем следните съкратени означения

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{A}_K & \mathbf{Y} \mathbf{A} + \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 \end{pmatrix} \\ \Psi_{11} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_K + \mathbf{C}_K^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \\ (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21})^T & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} \\ \Psi_{21} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_K + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2)^T & \mathbf{Y} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_K \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_K & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix} \\ \Psi_{22} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{A} + \mathbf{B}_K \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{B}_K^T & (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2)^T \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_K \mathbf{C}_2 & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

И нека, както обикновено, с  $A_c$  означим системната матрица на системата с обратна връзка.

**Теорема (Съществуване).** Управление  $K$  зададено с ур. (6.21), за което

$$A_c \text{ е } \mathcal{D} \text{ - устойчива и } \|F_{zw}\|_{\infty} < \gamma$$

съществува тогава и само тогава, когато съществуват матрици  $A_K, B_K, C_K, D_K$  и симетрични  $n \times n$  матрици  $X$  и  $Y$ , за които са изпълнени следните ЛМН:

$$\begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} > 0 \quad \left( \lambda_{kl} \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} + \mu_{kl} \Phi + \mu_{lk} \Phi^T \right) < 0 \quad \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} < 0.$$

**Синтез.**

Ако посочените матрици бъдат намерени, управлението може да се пресметне по следния начин:

*Стъпка 1.* Пресмята се факторизация от вида

$$X_2 X_2^T = X - Y^{-1} \quad (X - Y^{-1} > 0)$$

като декомпозиция по сингулярни стойности с квадратна и обратима матрица  $X_2$  и да се определи  $Y_2 = -YX_2$ .

*Стъпка 2.* Решават се системите ур. (6.23) и (6.24), за да се получат  $B_K, C_K, A_K$ .

Подобен род  $H_{\infty}$  синтез се изпълнява в MATLAB LMI Control Toolbox.

## 6.4. Решаване на ЛМН в пакета MATLAB

В основата на числените методи за решаването на ЛМН са заложили методите на изпъкналата оптимизация. В пакета MATLAB се използват методите на вътрешната точка [70-71].

Ще изложим накратко основната идея на тези методи за задачата за минимизация на изпъкнала функция  $f(x)$  на множеството  $\mathcal{F} = \{x : F(x) > 0\}$ , определено с ЛМН. Тази задача за условна оптимизация се свежда до задачата за безусловна оптимизация на функцията

$$f_r(x) = r f(x) + \phi(x)$$

където  $r > 0$  е параметър, а функцията  $\phi(x)$  се определя с уравнението

$$\phi(x) = \begin{cases} \log \det F^{-1}(x), & x \in \mathcal{F} \\ \infty, & x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

Решаването на задачата за безусловна оптимизация представлява итерационен процес, при който на всяка итерация се прилага метода на Нютон-Рафсон за намиране на минимума  $x_n$  на функцията  $f_r(x)$  при  $r = x_n$ . За построената по съответен начин редица  $r_n \rightarrow \infty$  редицата  $x_n$  клони към точка  $x_*$ , която се явява решение на първоначалната задача за условна оптимизация.

Задачата за разрешимостта на ЛМН  $F(x) < 0$  се свежда до минимизация на параметър  $t$ , за който е изпълнено матричното неравенство

$$F(x) - tI \leq 0.$$

Ако  $t_{\min} \leq 0$ , то изходното ЛМН е разрешимо. В противния случай,  $t_{\min} > 0$ , неравенството е неразрешимо. За численото решаване се използва командата

$$[tmin, xfeas] = feasp(lmisys, options, target),$$

в която  $tmin$  и  $xfeas$  са минималната стойност на параметъра  $t$  и на отговарящото му решение на ЛМН. Аргументите на командата `feasp` са: `lmisys`, `options` и `target`. Аргументът `lmisys` дава описанието на ЛМН (размерност и структура на матричните променливи, задава известните матрици). Аргументът `options` описва параметрите на алгоритъма на оптимизацията. Аргументът `target` е зададената стойност на параметъра  $tmin$ , за която при  $t < target$  алгоритъмът за оптимизация се прекратява (по подразбиране `target = 0`).

За решаването на задачата за минимизация при ограничение, зададени с линейно матрично неравенство, се използва командата

$$[copt, xopt] = mincx(lmisys, c, options, xiint, target),$$

в която `copt` и `xopt` са минималната стойност на минимизиращата линейна функция и съответната стойност на величината  $x$ . Аргументите на командата `mincx` имат следното значение. Аргументът `lmisys` описва ЛМН. Аргументът `c` описва вектора с определящ линейната функция, която се минимизира. Аргументът `options` е описание на параметрите на алгоритъма за оптимизиране. Аргументът `xiint` е векторът на началното приближение за `xopt` (удачното задаване на този вектор може да ускори процеса на оптимизиране). Аргументът `target` е зададена стойност на параметъра за величината  $c^T x$ , за която при  $c^T x < target$  алгоритъмът на оптимизиране се прекратява.

За решаването на задачата за обобщени собствени стойности се използва командата

$$[lopt, xopt] = gevp(lmisys, nlf, options, linit, xinit, target),$$

в която `lopt` и `xopt` са минималната собствена стойност и съответната стойност на променливите  $x$ . Аргументът `lmisys` описва ЛМН. Аргументът `nlf` дава броя на ограниченията, зададени чрез ЛМН. Аргументът `options` задава параметрите на алгоритъма на оптимизацията. Аргументите `linit` и `xinit` представляват началните приближения на `lopt` и `xopt`. Аргументът `target` представлява зададената стойност на параметъра  $\lambda$ , за който при  $\lambda < target$  алгоритъмът на оптимизиране се прекратява.

За решаване на неравенството

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0 ,$$

което се ползва нееднократно при численото решаване на задачата за намиране на робастно управление по ЛМН метода, се използва командата

$$X_c = \text{basiclmi}(\Psi, Q, P) ,$$

която дава решение  $X_c$ . Когато към аргументите на тази команда се добави ' $X_{min}$ '

$$X = \text{basiclmi}(\Psi, Q, P, 'X_{min}')$$

това позволява да бъде намерено решение на зададеното неравенство с минимална норма.

Ще отбележим също, че матрица  $W_M$ , чиито стълбове образуват базис на ядрото на дадена матрица  $M$ , се намира с оператора

$$W_M = \text{null}(M) .$$

## 6.5. Активно погасяване на колебания на високи съоръжения

### 6.5.1 Предварителни бележки

По настоящем, за решаване на възникващата задача за погасяване на вибрации на строителни структури, възникващи при сеизмични въздействия, най-активно използвани са два принципно различни подхода за организацията на такова управление. Единият метод е на динамично погасяване на вибрациите чрез използване на допълнителни материални тела. Вторият метод е виброзащита, предполагаща изолирането на съоръженията от подвижната основа. Един възможен вариант за техническа реализация на динамично погасяване на вибрации се състои в създаването на специален етаж, където да се разположи някакво достатъчно малка маса (в сравнение с общата маса на строителната структура), която да се премества в съответствие със закона за управление по обратна връзка по текущите показания на датчиците. Това би позволило да се окаже управляващо въздействие на дадения етаж. Основната трудност при оразмеряването на подобни системи за сеизмична защита е обстоятелството, че управлението се осъществява в условия на неопределеност както относно самата система така и относно сеизмичните въздействия.

В тази част от работата се разглежда подход за управление на вибрации на строителни структури в условията на непълна информация за действащите смущения и на параметрите на структурата, основан на прилагането на теорията за  $H_\infty$  управление [65,77]. Синтезира се  $H_\infty$  управление в случая на пълна информация за параметрите на обекта, а също така робастно  $H_\infty$  управление при неопределеност в коефициентите на дъмпинга и еластичността на съоръжението. Като се използва специалният вид на уравненията на движението, съдържащи само един параметър, характеризиращ колебателните свойства на съоръжението, в този параграф

разглежданията се свеждат до задачата за погасяване на вибрациите на съоръжението както с известна стойност на този параметър, така и до случая, когато точната стойност на този параметър не е известна и принадлежи на даден интервал.

Ако при описанието на системата присъства неопределеност, синтезът на робастни  $H_\infty$  управления, осигуряващи отхвърлянето на смущенията в изисквано съотношение при произволна неопределеност от даден клас, се свежда до синтез на  $H_\infty$  управление за вспомагателна система, съдържаща допълнителни параметри. Тази вспомагателна система е напълно определена и се получава от изходната неопределена система чрез замяна на неопределеностите с допълнителни изкуствени смущения, влизащи в уравнението на системата с тегловни коефициенти – допълнителни параметри. Синтезът на  $H_\infty$  управление за такъв вид системи може да бъде сведен до оптимизирането на някаква функция при ограничения, зададени от система ЛМН, които съдържат допълнителни параметри като променливи [72–74]. При управление по измерено състояние тази задача е изпъкнала, а при управление по измерен изход тя е принципно неизпъкнала. В този параграф за синтеза на  $H_\infty$  управление на многоетажна сграда се предлага алгоритъм, който се реализира като итерационен процес, на всяка стъпка на който с помощта на стандартни команди в пакета MATLAB се решава задача за търсене на минимум на линейна функция при ЛМН ограничения.

### 6.5.2 Постановка на задачата

За системата

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_1 + B_2u, \\ y &= C_2x + v_2, \end{aligned}$$

да разгледаме следната задача за погасяване на вибрациите с помощта на управление. Управлението ще се осъществява с линеен динамичен регулатор, синтезиран по принципа на обратната връзка по изход във вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= -\Theta x_r, \quad x_r(0) = 0, \end{aligned} \tag{6.25}$$

където  $x_r$  е състоянието на динамичния регулатор. Да обединим вектор-функциите  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  в общ вектор на външното смущение  $v(t) = \text{col}(v_1(t), v_2(t))$ , за която ще смятаме, че е функция интегруем квадрат за  $t \in [0, \infty)$ , т.е.  $v \in \mathcal{L}_2$ . На траекториите на система (5.102) определяме функционала

$$J(u, v) = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt, \tag{6.26}$$

където  $Q$  е симетрична неотрицателно определена матрица. Този функционал характеризира качеството на колебателните процеси в механичката система. При избор на матрицата  $Q$  в блочен вид

$$Q = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

квадратичната форма в подинтегралния израз в ур. (6.26) определя пълната механична енергия на системата при нейното движение относно основата и разходите за управлението.

Задачата за погасяване на вибрациите се състои в построяване на линейно динамично управление от вида (6.25), осигуряващо отхвърляне на външните смущения в дадено съотношение  $\gamma$ , т.е. изпълняване на неравенството

$$\frac{\int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt}{\int_0^{\infty} |v|^2 dt} < \gamma^2 \quad (6.28)$$

за всички ненулеви допустими смущения, а също така в оценката на минималното възможно ниво на погасяване на вибрациите, т.е. минималната възможна стойност на  $\gamma$ , при която е изпълнено (6.28). Ако въведем така наречения изход на системата като

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad (6.29)$$

то неравенство (6.28) приема вида

$$\frac{\int_0^{\infty} |z|^2 dt}{\int_0^{\infty} |v|^2 dt} < \gamma^2.$$

По такъв начин, разглежданата задача се свежда до задачата за синтез на  $H_{\infty}$  управление по изход, което осигурява изпълнение на неравенството

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \quad \forall v \neq 0 \quad (6.30)$$

за системата

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 v + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} v, \end{aligned} \quad (6.31)$$

където  $\|z\|$  означава  $\mathcal{L}_2$  -норма, матриците  $A$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  са определени по-горе, а

$$B_1 = (B, 0), \quad C_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{Q} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad D_{21} = (0, I).$$

Освен това ще разгледаме задачата за робастно  $H_\infty$  управление, когато стойността на параметъра  $\beta$ , характеризиращ даденостите на строителната структура да вибрира, не е точно известен. Предполагайки, че  $\beta$  може да приема произволна стойност в даден интервал, го представяме във вида

$$\beta = \beta_0(1 + f\Omega),$$

където  $\beta_0$  е номиналната стойност,  $f$  е даден параметър, характеризиращ големината на интервала на неопределеност, а неопределения параметър  $\Omega$  удовлетворява условието

$$|\Omega| \leq 1. \tag{6.32}$$

В този случай матрицата  $A$  в ур. (6.31) се представя във вида

$$A = A_0 + F\Omega E, \tag{6.33}$$

където

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ fI \end{pmatrix}, \quad E = (0, -\beta K).$$

Тогава задачата за робастно  $H_\infty$  управление се състои в построяване на линеен динамичен регулатор по изход, който осигурява погасяването на вибрации в дадено съотношение  $\gamma$  за произволна многоетажна сграда с параметър  $\beta$  в даден диапазон

$$\frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \quad \forall v \neq 0, \quad \forall |\Omega| \leq 1. \tag{6.34}$$

Представлява също интерес и минималната възможна стойност  $\gamma_0$  за погасяване на вибрациите.

### 6.5.3. Решение на задачата за $H_\infty$ управление

В § 5.2.1 беше установено, че при изпълнение на условия  $(A1)_{H_\infty}$ – $(A4)_{H_\infty}$  на основната теорема за обратна връзка едно от възможните  $H_\infty$  управления се описва с (ур. (5.4))

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u, \\
 A_r &= A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty - L C_2, \\
 u &= -\Theta x_r, \quad B_r = L, \quad \Theta = B_2^T X_\infty, \\
 L &= Y_\infty (I - \gamma^2 X_\infty Y_\infty)^{-1} C_2^T,
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

При това са изпълнени условията **(i)–(iii)** на теоремата, т.е.  $X_\infty$  и  $Y_\infty$  са неотрицателно определените стабилизиращи решения на уравненията на Рикати (5.5) и  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

В ЛМН термините управлението се дава с ур (6.35), в които  $X_\infty = \gamma R^{-1}$  и  $Y_\infty = \gamma S^{-1}$ , а  $R = R^T > 0$ ,  $S = S^T > 0$  удовлетворяват системата ЛМН (ур. (6.21), § 6.3.2.) [75–76]

$$\begin{pmatrix} RA^T + AR - \gamma B_2 B_2^T & B_1 & RC_1^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 \\ C_1 R & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \tag{6.36}$$

$$\begin{pmatrix} SA + A^T S - \gamma C_2^T C_2 & C_1^T & SB_1 \\ C_1 & -\gamma I & 0 \\ B_1^T S & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \tag{6.37}$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0. \tag{6.38}$$

#### 6.5.4. Решение на задачата за робастно $H_\infty$ управление

В случая на неизвестен параметър  $\beta$  динамиката на строителната структура се описва с ур. (6.31), в която матрицата  $A$  има вида (6.33). Тогава разглеждаме вспомогателната система

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= A_0 x + (B_1 \gamma \alpha^{1/2} F) w + B_2 u, \\
 \hat{z} &= \begin{pmatrix} C_1 \\ \alpha^{-1/2} E \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} D_{12} \\ 0 \end{pmatrix} u, \\
 y &= C_2 x + (D_{21} 0) w,
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

която е напълно определена, и в която  $w = \text{col}(w_0, w_1)$  е външното смущение,  $\hat{z}$  е управляемият изход, а  $\gamma > 0$  и  $\alpha > 0$  са някакви числа. В частния случай, когато  $w_0 = v$

и  $w_1 = \gamma^{-1} \alpha^{-1/2} \Omega E x$ , първото уравнение на (6.31) с матрица (6.33) съвпада с първото уравнение на (6.39).

Законът за управление, който осигурява за системата (6.39) за някое  $\alpha > 0$  неравенството

$$\|\hat{z}\| < \gamma \|w\|, \quad \forall w \in L_2, \quad w \neq 0, \quad (6.40)$$

също така осигурява за изходната система (6.31), (6.33) изпълнението на неравенството

$$\|z\| < \gamma \|v\|, \quad \forall v \in L_2, \quad v \neq 0 \quad (6.41)$$

при същата стойност на параметъра  $\gamma$ . Затова решаваме задачата за  $H_\infty$  управление за системата (6.39).

$H_\infty$  управление за (6.39) съществува, ако е разрешима следната система ЛМН, съответстваща на системата (6.36)–(6.38).

$$\Phi_1(R, \alpha) = \begin{pmatrix} RA_0^T + A_0 R - \gamma B_2 B_2^T & B_1 & \alpha F & RC_1^T & RE^T \\ B_1^T & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ \alpha F^T & 0 & -\alpha I & 0 & 0 \\ C_1 R & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ ER & 0 & 0 & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} < 0, \quad (6.42)$$

$$\Phi_2(S, \alpha^{-1}) = \begin{pmatrix} SA_0 + A_0^T S - \gamma C_2^T C_2 & C_1^T & \alpha^{-1} E^T & SB_1 & SF \\ C_1 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^{-1} E & 0 & -\alpha^{-1} I & 0 & 0 \\ B_1^T S & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ F^T S & 0 & 0 & 0 & -\alpha^{-1} I \end{pmatrix} < 0, \quad (6.43)$$

$$\Phi_3(R, S) = \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0. \quad (6.44)$$

В общия случай на неизмеримо състояние построяването на робастно  $H_\infty$  управление не се свежда до решаването на задача на изпъкнала оптимизация относно променливите  $R, S$  и  $\alpha$ . Тук ще разкажем за една идея синтезът да се осъществи като се използва техниката на изпъкналата оптимизация при ограничения, задавани чрез ЛМН. За тази цел ще забележим, че параметърът  $\alpha$  участва линейно в първото неравенство, а параметърът  $\alpha^{-1}$  влиза линейно във второто неравенство. Въвеждаме допълнителен параметър  $\sigma$ , като с него заместваем  $\alpha^{-1}$  в неравенство (6.43), записвайки го във вида

$$\Phi_2(S, \alpha) = \begin{pmatrix} SA_0 + A_0^T S - \gamma C_2^T C_2 & C_1^T & \alpha E^T & SB_1 & SF \\ C_1 & -\gamma I & 0 & 0 & 0 \\ \sigma E & 0 & -\sigma I & 0 & 0 \\ B_1^T S & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ F^T S & 0 & 0 & 0 & -\sigma I \end{pmatrix} < 0. \quad (6.45)$$

За да получим еквивалентна система ЛМН, трябва да осигурим изпълнението на равенството

$$\alpha \sigma = 1, \quad (6.46)$$

което е еквивалентно на двете неравенства

$$\alpha \sigma \geq 1, \quad \alpha \sigma \leq 1.$$

Първото от тях може да бъде представено във вид на ЛМН по следния начин

$$\Phi_4(\alpha, \sigma) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \sigma \end{pmatrix} \geq 0, \quad (6.47)$$

а второто неравенство принципиално не може да бъде представено в подобен вид, тъй като задава неизпъкнала област в равнината на  $\alpha$  и  $\sigma$ .

Нека въведем функцията

$$\Psi(\alpha, \sigma) = \alpha - \sigma^{-1}$$

и да формулираме следната оптимизационна задача:

На множеството от променливи  $R > 0, S > 0, \alpha > 0, \sigma > 0$  удовлетворяващи ЛМН (6.42),(6.44),(6.45) и (6.47), да се намери минимумът на функцията  $\Psi(\alpha, \sigma)$ . За да продължим напред, ще използваме следното твърдение [77].

*Теорема.* Нека при дадено  $\gamma$  е в сила равенството

$$\inf\{\Psi(\alpha, \sigma) : R > 0, S > 0, \alpha > 0, \sigma > 0, \Phi_1(R, \alpha) < 0, \Phi_2(S, \sigma) < 0, \Phi_3(R, S) \geq 0, \Phi_4(\alpha, \sigma) \geq 0\} = 0. \quad (6.48)$$

Тогава задачата за робастно  $H_\infty$  управление за неопределената система е разрешима за даденото  $\gamma$ .

Основната трудност на разглежданата задача е, че минимизираната функция не е изпъкнала и търсенето на глобален екстремум не може да се осъществи с методите на изпъкналата оптимизация.

### 6.5.5. Алгоритъм за оптимизиране

В този параграф представяме алгоритъм за оптимизиране на функцията, който се основава на итерационна процедура, при която на всяка стъпка се намира минимума на линейна функция при линейни матрични (изпъкнали) ограничения. Нека въведем следната функция, линейна по променливите  $\alpha$  и  $\sigma$

$$\hat{\Psi}(\alpha, \sigma; q) = (1 \ q) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} = \alpha + q^2 \sigma + 2q,$$

където  $q$  е някакъв параметър. Фиксираме стойността на параметъра  $q = q^{(0)}$  и разглеждаме задачата за минимизиране на линейната функция (6.48) при  $q = q^{(0)}$ . В пакета MATLAB този минимум се намира с командата **mincx**.

Нека минимумът се достига при  $\alpha = \alpha^{(0)}$  и  $\sigma = \sigma^{(0)}$ . Заместваме стойността на параметъра  $q$  с  $q^{(1)} = -1/\sigma^{(0)}$  и решаваме оптимизационната задача (6.48) при  $q = q^{(1)}$ . Нека нейният минимум се достига при  $\alpha = \alpha^{(1)}$  и  $\sigma = \sigma^{(1)}$ . Избираме  $q^{(2)} = -1/\sigma^{(1)}$  и продължаваме този процес. Алгоритъмът спира при изпълнението на поне едно от следните две условия:

$$\eta(\alpha^{(j)}, \sigma^{(j)}) < \varepsilon$$

или

$$|\Delta \eta^{(j)}| = |\eta(\alpha^{(j+1)}, \sigma^{(j+1)}) - \eta(\alpha^{(j)}, \sigma^{(j)})| < \varepsilon,$$

$$\eta(\alpha, \sigma) = (\alpha\sigma - 1)$$

$\varepsilon > 0$  определя зададената точност.

Може да се докаже, че за произволно  $q^{(0)}$  съществува следната граница

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Psi(\alpha^{(j)}, \sigma^{(j)}) = \Psi_{\infty} \geq 0.$$

и следователно

$$\eta(\alpha^{(j)}, \sigma^{(j)}) \longrightarrow \eta_{\infty}$$

което означава, че има итерация, при която алгоритъмът спира. При това са възможни два случая. В първия случай  $\eta_{\infty} = 0$  и тогава вспомогателната задача, а следователно, задачата за робастно  $\mathbf{H}_{\infty}$  управление е разрешима при даденото  $\gamma$ . При втория случай  $\eta_{\infty} > 0$  и не може да се направи определен извод поради липса на гаранция за сходимост на алгоритъма към глобалния минимум на функцията  $\Psi(\alpha, \sigma)$ . При този случай е целесъобразно да се повтори процесът при други начални условия  $q^{(0)}$ , както обикновено се постъпва в задачите на глобална оптимизация. Търсенето на минимално възможно  $\gamma$  се осъществява, както обикновено, с прилагане на алгоритъм за делене на интервала на две половини. Левият край на интервала отговаря на стойност на  $\gamma$ , при която спомогателната задача е неразрешима.

След намирането със зададената точност на минималната стойност  $\gamma_0$  и съответстващото му  $\alpha^*$  синтезът на търсеното управление се осъществява за  $X_\infty = \gamma_0 R^{-1}$  и  $Y_\infty = \gamma_0 S^{-1}$ , а  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{S}$  удовлетворяват ЛМН (6.42)–(6.44) с намерените  $\gamma_0$  и  $\alpha^*$ .

### 6.5.6. Числени резултати

Числените експерименти са правени за осем етажна сграда ( $n = 8$ ). Управляващата сила е приложена на третия етаж ( $k = 3$ ). Отначало пресмятането на минималното възможно ниво на погасяване на вибрациите на строителната структура се прави при известна номинална стойност на параметъра  $\beta$  равна на едно. Минималната стойност за  $\gamma$  е получена 10.21. След това са правени експерименти при неизвестна точно стойност на параметъра  $\beta$ , но се приема че той лежи в интервала от 0.3 до 1.7. В този случай  $\beta_0 = 1$ ,  $f = 0.5$

При прилагането на алгоритъма за оптимизация в случая, когато параметъра  $\beta$  не е известен точно, минимално възможното ниво на погасяване на вибрациите се получава при  $\gamma_0 = 19.34$  (при  $\gamma = 19.27$ ) системата ЛМН е неразрешима). При  $\gamma = 19.34$  и начална стойност на параметъра  $\mathbf{q} = \mathbf{1}$ , след третата итерация се получава  $\eta \approx 10^{-5}$ , което свидетелства за разрешимостта на разглежданата задача за робастно  $H_\infty$  управление при дадено  $\gamma$ .

## 7. Неопределеност на система

$H_{\infty}$  оптимизацията е адекватен инструмент за синтез на управление, ако характеристиките на обратната връзка са формулирани в честотната област. От друга страна  $H_{\infty}$  оптималното управление не е необходимо робастно. Построяването на робастно управление може да бъде постигнато с така наречената **D-K** итерация. Приложението на този метод изисква прецизен математически апарат за робастност на система, която се разглежда в тази част. Един източник на неопределеност е пренебрегването на високо честотната динамика. Този тип неопределеност се моделира с неизвестна предавателна функция заедно с някои тегла и се нарича неструктурирана неопределеност. Друг тип неопределеност възниква, ако един или повече параметри на техническата система не са напълно известни. Това води до структурирана неопределеност. Разбира се може да има параметрична неопределеност в комбинация с неопределена динамика. Затова е необходим математически апарат, който покрива всички типове неопределеност. Такъв апарат е основата за методите за анализ и синтез на робастни вериги по обратна връзка. В тази глава ще бъде обсъдена и неопределеност за техническа система от втори ред.

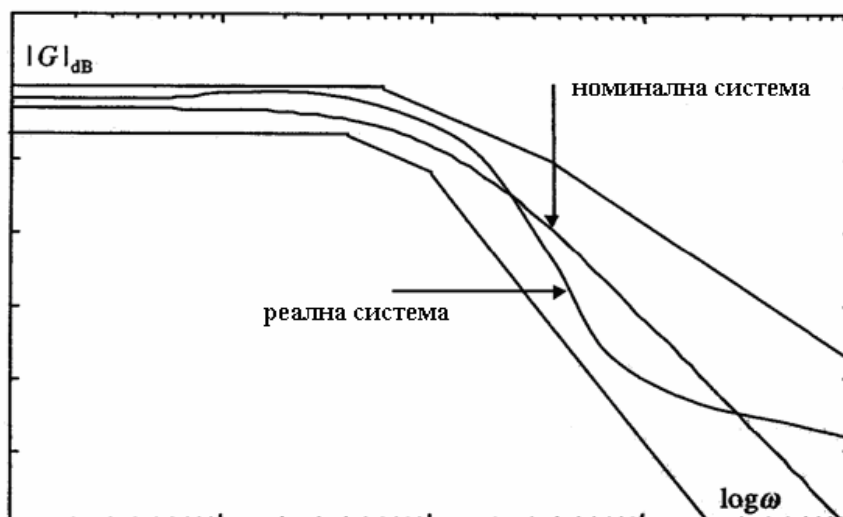
### 7.1. Моделиране на неопределеност

Всеки метод за синтез в теория на управлението изисква математически модел на техническата система. Този модел може да е резултат от построяване на математически модел на основата на физически закони или това може да бъде идентификационна процедура или може да бъде смесица от двата метода. В някои области на технологията се полагат значителни усилия да се създаде акуратен модел, докато в други синтезът може да се извършва на основата на доста грубо изработен модел. При всички случаи синтезът на управление се основава на математически модел, който е само опростен образ на физическата реалност.

Има два основни типа неопределеност, именно, параметрическа неопределеност и немоделирана динамика. Типичен пример за първия тип са параметрите на строителните структури. Немоделираната динамика може да възникне, ако взаимни влияния в ММО система бъдат пренебрегнати или ако се използват опростени модели на управляващото устройство или датчика. Възможен източник за пренебрегната динамика в механична техническа система може да бъде нейната структура, която в модела се приема като нееластична, а в действителност притежава

гъвкавост. Примери за технически системи с подобни проблеми са телескопа, снаряда, който има склонност да вибрира, когато трябва да лети по силно извита крива.

Така често високо честотната динамика на техническата система е неточна. Това означава, че при високи честоти амплитудата и фазата лежат в граници, които могат да стават по-широки, ако честотите нарастват. Подобно явление е показано на Фиг.7.1.



Фигура 7.1. Типичен модел на неопределеност в честотната област

Така моделът на една техническа система може да се разглежда като съставен от две части:

- (1) модел на номиналната система
- (2) модел на неопределености

Всички технически системи, обхванати от това моделиране са елементи от дадено множество  $\Pi$ . И номиналната и техническата система са елементи на  $\Pi$ . С цел целите на синтеза да придобият точно значение даваме следните важни определения.

**Дефиниция.** Нека е дадено множество  $\Pi$  от технически системи такова, че номиналната техническа система  $G$  е елемент на  $\Pi$ . Освен това нека е дадено множество от цели за качеството и да предположим, че  $K$  е управление, което удовлетворява тези цели. Тогава се казва, че системата с обратна връзка има

**Номинална устойчивост (НУ)**, ако  $K$  стабилизира вътрешно номиналната техническа система  $G$ ;

**Робастна устойчивост (РУ)**, ако  $K$  стабилизира вътрешно всяка техническа система принадлежаща на  $\Pi$ ;

**Номинално качество (НК)**, ако целите на качеството се удовлетворяват за номиналната техническа система  $G$ ;

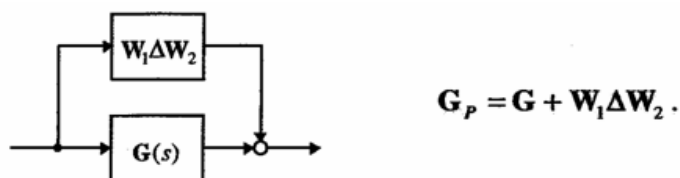
**Робастно качество (РК)**, ако целите на качеството се удовлетворяват за всяка техническа система принадлежаща на  $\Pi$ .

Наша цел е да построим управления, които са робастно устойчиви и имат робастно качество.

## 7.2. Неструктурирани неопределености

Отначало разглеждаме неопределеност, породена от немоделирана динамика и предполагаме, че реалната техническа система е получена като обединяване на номиналната техническа система  $G(s)$  и предавателна функция от вида  $W_1(s)\Delta(s)W_2(s)$ . Такъв вид неопределеност се нарича *неструктурирана*. Преносните функции  $W_1, W_2$  са дадени и характеризират неопределеността, докато  $\Delta$  е неизвестна. Предполага се, обаче, че  $\Delta$  е устойчива и има ограничен големина  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . По-късно теглата  $W_1, W_2$  ще бъдат моделирани като част от разширената техническа система. Така системата с обратна връзка се състои от разширена техническа система, неопределеност  $\Delta$  и управление  $K$ .

Смутената техническа система означаваме с  $G_p$ . **Адитивна неопределеност** се дава със следните схема и формула

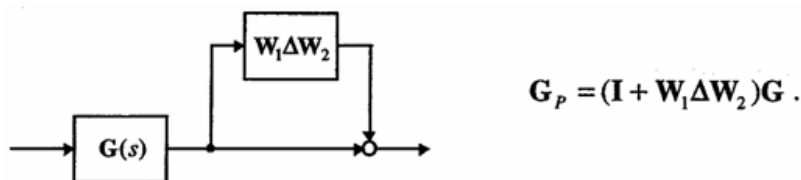


**Входно - мултипликативна** неопределеност се дава със схемата и формулата



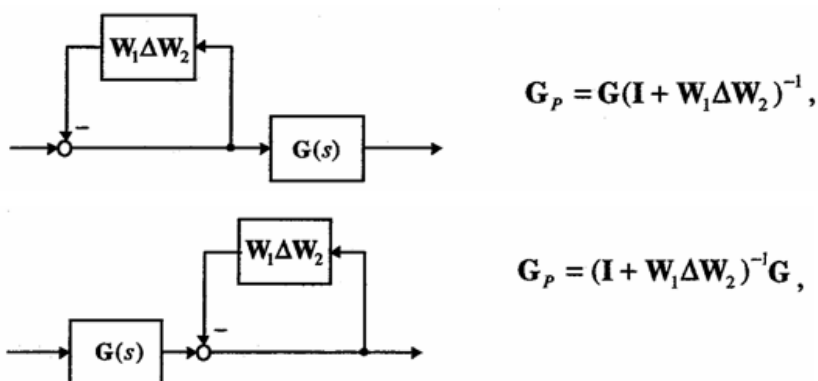
и се използва за моделиране на грешки в управляващото устройство или пренебрегната високо честотна динамика.

**Изходно – мултипликативна** неопределеност се моделира със схемата и формулата



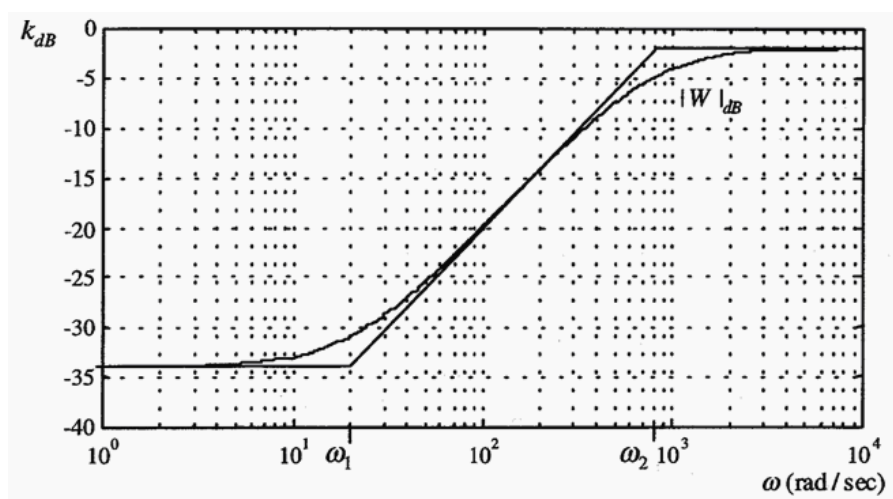
и се използва за моделиране на грешки в датчика или пренебрегната високо честотна динамика.

Неопределености **при входа и при изхода** на обратната връзка се моделират аналогично с



и се използват за моделиране на ниско честотни параметрични грешки. Типична тегловна функция за моделиране на скаларни системи смутени мултипликативно на входа е (Фиг.7.2)

$$W(s) = \frac{k\omega_2 s + \omega_1}{\omega_1 s + \omega_2} \quad \omega_1 < \omega_2.$$



Фигура 7.2. Магнитут на тегло  $W(s)$

За честоти  $\omega \leq \omega_1$  процентът на грешката в коефициента е  $\leq k$ , а за честоти  $\omega \geq \omega_2$  той е  $\leq k\omega_2/\omega_1$ .

### 7.3. Структурирани неопределености

#### 7.3.1. Структурирани неопределености в пространството на състоянията

Разглеждаме общи линейни системи, при които неопределеността се намира в параметрите на линейното диференциално уравнение от вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (7.1)$$

и да приемем, че неопределеността е адитивна по отношение на матриците на системата.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\delta, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_\delta, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_\delta, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_\delta.$$

Номиналната техническа система е описана с матриците  $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0, \mathbf{D}_0$ . Останалите матрици  $\mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta, \mathbf{D}_\delta$  се прима, че зависят линейно от неопределени параметри  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  както следва:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_\delta & \mathbf{B}_\delta \\ \mathbf{C}_\delta & \mathbf{D}_\delta \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \delta_i \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{pmatrix}.$$

Задачата е да отделим параметрите  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  от техническата система. За тази цел разширяваме техническата система с допълнителни входни и изходни променливи:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{w}_p \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{D}_0 \mathbf{u} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{z}_p &= \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

където и  $\mathbf{z}_p$  и  $\mathbf{w}_p$  са адекватно разделени.

$$\mathbf{z}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{p1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{pk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{p1} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{pk} \end{pmatrix}.$$

Матриците  $\mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}$  трябва да бъдат построени така, че неопределената техническа система да се получава от разширената техническа система с помощта на закона за обратна връзка

$$\mathbf{w}_{pi} = \delta_i \mathbf{z}_{pi} \quad i = 1, \dots, k \quad (7.3)$$

с подходящо оразмерени вектори  $\mathbf{w}_{pi}$  и  $\mathbf{z}_{pi}$ . За тази цел нека

$$q_i = \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{pmatrix},$$

и да въведем декомпозициите

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_i \\ \mathbf{W}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i^T & \mathbf{Z}_i^T \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{L}_i \in \mathbb{R}^{n \times q_i}, \mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{l \times q_i}, \mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{n \times q_i}, \mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{m \times q_i}. \quad \mathbf{w}_{pi}, \mathbf{z}_{pi} \in \mathbb{R}^{q_i}$$

Въвеждаме

$$\mathbf{E}_\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \mathbf{I}_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_k \mathbf{I}_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Тогава ур. (7.3) може да бъде преписано във вида

$$\mathbf{w}_P = \mathbf{E}_\delta \mathbf{z}_P.$$

Ако въведем този вектор  $\mathbf{w}_P$  в ур. (7.2), ще получим оригиналната техническа система (7.4). Така получаваме и изразите

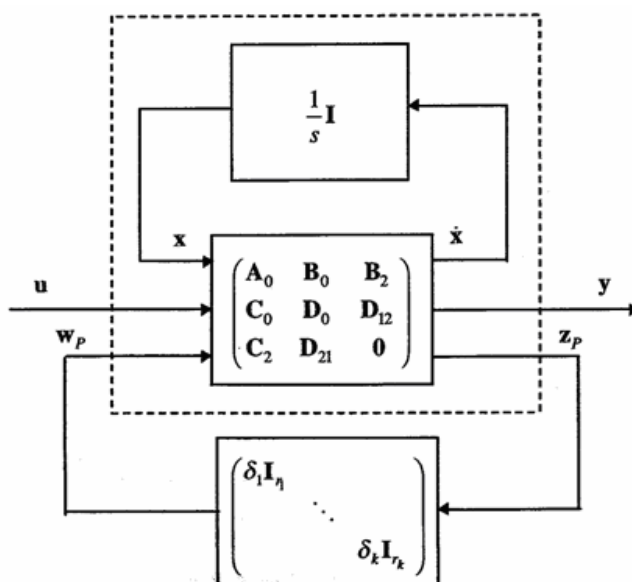
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\delta &= \mathbf{B}_2 \mathbf{E}_\delta \mathbf{C}_2, & \mathbf{B}_\delta &= \mathbf{B}_2 \mathbf{E}_\delta \mathbf{D}_{21}, \\ \mathbf{C}_\delta &= \mathbf{D}_{12} \mathbf{E}_\delta \mathbf{C}_2, & \mathbf{D}_\delta &= \mathbf{D}_{12} \mathbf{E}_\delta \mathbf{D}_{21}, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\delta & \mathbf{B}_\delta \\ \mathbf{C}_\delta & \mathbf{D}_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{D}_{12} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\delta (\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{21}),$$

и от тук се вижда, че матриците

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= (\mathbf{L}_1 \quad \dots \quad \mathbf{L}_k), & \mathbf{D}_{12} &= (\mathbf{W}_1 \quad \dots \quad \mathbf{W}_k), \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k^T \end{pmatrix}, & \mathbf{D}_{21} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_k^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

имат желаното свойство.

По този начин получаваме блок диаграмата на Фиг.7.3. С описаната процедура неопределените параметри  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  бяха отделени по такъв начин, че разширената техническа система може да бъде разгледана като система с обратна връзка.



Фигура 7.3. Структурна неопределеност в пространството на състоянията

### 7.3.2. Параметрични неопределености за преносни функции

Главната стъпка за преформулирането на система с неопределености е „извеждането“ на неопределеностите от системата. В предишния параграф тази процедура беше показана за общи системи в пространството на състоянията. В този параграф тази процедура ще бъде демонстрирана на конкретен пример.

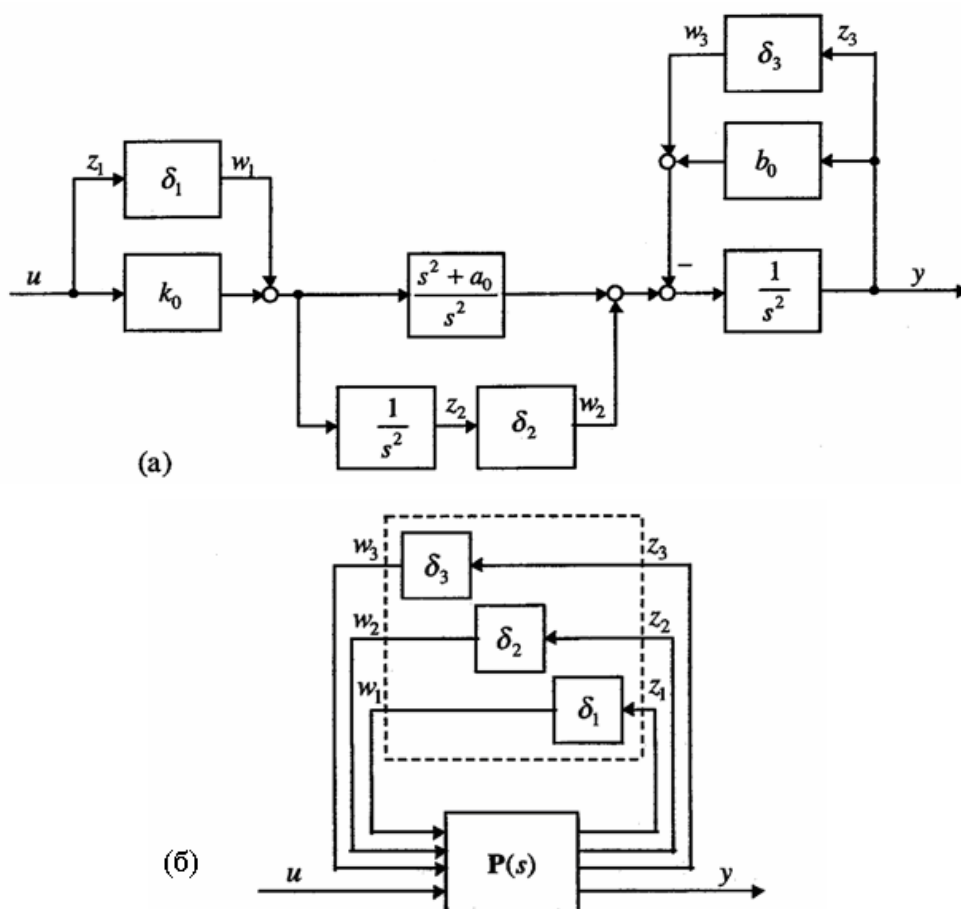
Нека разгледаме предавателната функция

$$G(s) = k \frac{s^2 + a}{s^2(s^2 + b)}$$

и че и трите параметра са неопределени

$$k = k_0 + \delta_1, \quad a = a_0 + \delta_2, \quad b = b_0 + \delta_3.$$

За да отделим неопределеностите от системата, трябва да се състави блок диаграма, където отново неопределените параметри  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  да бъдат изолирани във вид на допълнителни блокове. С всеки от тези блокове свързваме входни променливи  $w_1, w_2, w_3$  и изходни променливи  $z_1, z_2, z_3$ . По този начин получаваме блок диаграмата на Фиг.7.4а.



Фигура 7.4. Извеждане на неопределеностите за системата

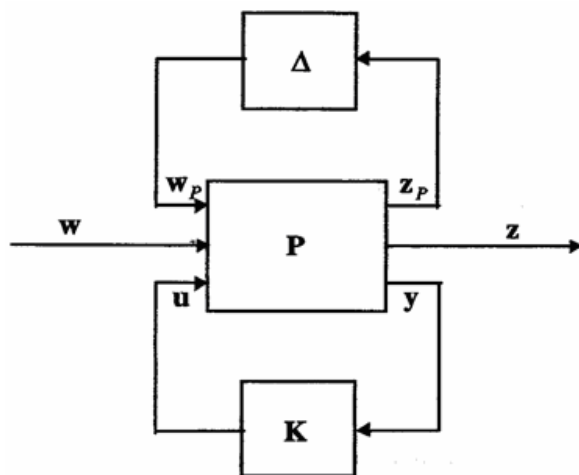
Така получаваме следното уравнение

$$\begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & 0 & \frac{k_0}{s^2} \\ \frac{s^2 + a_0}{s^2(s^2 + b_0)} & \frac{1}{s^2 + b_0} & \frac{-1}{s^2 + b_0} & k_0 \frac{s^2 + a_0}{s^2(s^2 + b_0)} \\ \frac{s^2 + a_0}{s^2(s^2 + b_0)} & \frac{1}{s^2 + b_0} & \frac{-1}{s^2 + b_0} & k_0 \frac{s^2 + a_0}{s^2(s^2 + b_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \\ \hat{u} \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Означавайки получената предавателна матрица с  $P(s)$ , можем да получим блок диаграмата на Фиг.7.4б.

### 7.3.3. Общ подход за неопределеност

Както вече разгледахме в предишните два параграфа, основната идея за представяне на неопределености е да се отделят неопределеностите от техническата система чрез създаването на допълнителен блок, който е свързан със техническата система посредством обратна връзка. За обща неопределена система с обратна връзка това води до блок диаграмата на Фиг.7.5, която е основна за всички по-нататъшни наши изследвания [78].



Фигура 7.5. Обща схема за неопределена система с обратна връзка

Разширената система се описва с девет блока

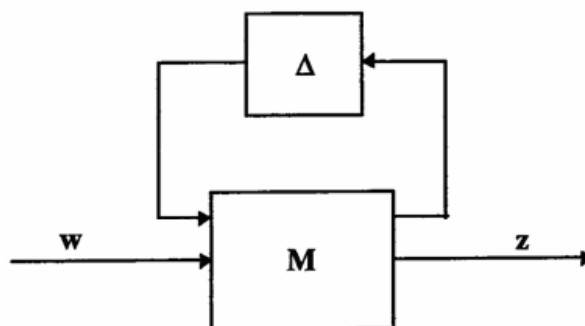
$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}_P \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{P}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_P \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) & \mathbf{P}_{13}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) & \mathbf{P}_{23}(s) \\ \mathbf{P}_{31}(s) & \mathbf{P}_{32}(s) & \mathbf{P}_{33}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_P \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Неопределената техническа система е

$$\mathbf{G} = \mathcal{F}_u(\mathbf{P}, \Delta) .$$

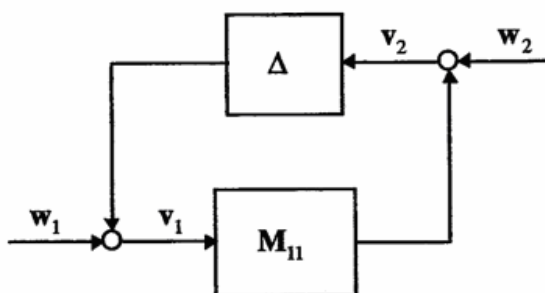
Тук  $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$  означава свързването по обратна връзка между  $P$  и  $\Delta$ . Неопределената система с обратна връзка е

$$\mathbf{M}(s) = \mathcal{F}_l(\mathbf{P}(s), \mathbf{K}(s)) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11}(s) & \mathbf{M}_{12}(s) \\ \mathbf{M}_{21}(s) & \mathbf{M}_{22}(s) \end{pmatrix} .$$



**Фигура 7.6.** Неопределена система с обратна връзка

Предавателната функция  $\Delta$  се предполага неизвестно, но устойчива. По този начин неопределеността е отделена от веригата на обратната връзка (Фиг.7.6). Да предположим, че разглеждаме всички такива смущения, които са ограничени по норма  $\|\Delta\|_\infty < \gamma$  с някаква константа. Нашата задача е да определим максималната стойност на  $\gamma$  така, че системата с обратна връзка да бъде вътрешно устойчива. За вътрешната устойчивост е достатъчно да разгледаме блока  $M_{11}(s)$  на матрицата  $M$  (Фиг.7.7)



**Фигура 7.7.** Диаграма за вътрешна устойчивост в присъствие на смущения

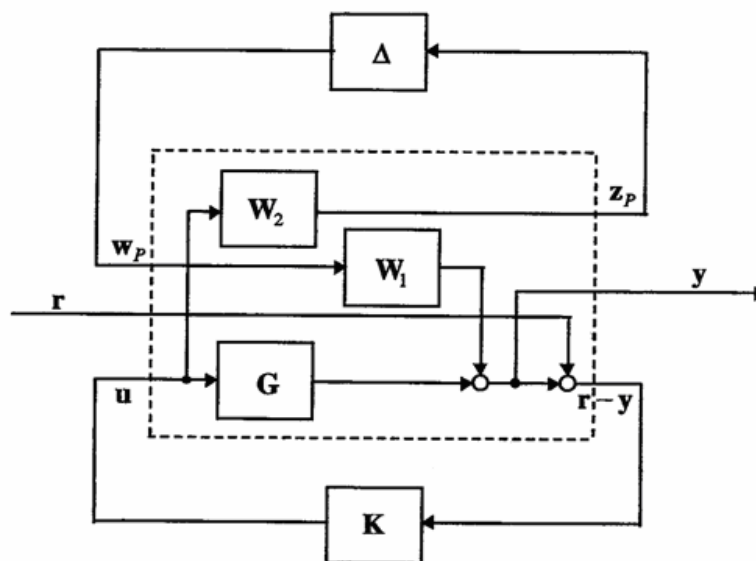
Неопределеността се състои от няколко компонента. Предполагаме, че тя има следната диагонална форма

$$\Delta = \text{diag}(\delta_1 \mathbf{I}_{r_1}, \dots, \delta_s \mathbf{I}_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F)$$

с  $\Delta_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ . Величините  $\delta_i$  могат да бъдат реални числа или преносни функции  $\delta_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ . С подходящи тегла, които трябва да бъдат добавени към техническата система, ние приемаме, че

$$|\delta_i| \leq 1 \quad (\text{или } \|\delta_i\|_\infty \leq 1) \quad \text{и} \quad \|\Delta_i\|_\infty \leq 1.$$

Така ние разглеждаме **структурни смущения** (Фиг.7.8).



**Фигура 7.8.** Стандартна обратна връзка с адитивни смущения

## 8. Синтез на робастно управление

В част 7 беше въведен математически подход за описанието на моделирани неопределености. Основната идея е да се изведат неопределеностите  $\Delta$  от техническата система така, че неопределената техническа система да бъде интерпретирана като система с обратна връзка състояща се от  $\mathbf{P}$  и  $\Delta$ . Тук  $\mathbf{P}$  представлява номиналната техническа система, която се получава от оригиналната физическа система  $\mathbf{G}$  чрез добавяне на тегла за качество и на неопределеност (Фиг.7.5). Номиналната система с обратна връзка е означена с  $\mathbf{M}$  и се състои от  $\mathbf{P}$  и управлението  $\mathbf{K}$ . Неопределената система с обратна връзка се получава, като входът  $w_p$  се свърже чрез обратна връзка с изхода  $z_p$  използвайки неопределеността  $\Delta$  (Фиг.7.6). По отношение на вътрешната устойчивост е достатъчно да използваме блока  $\mathbf{M}_{11}$ , затова Фиг.7.7 е основната блок диаграма по отношение на вътрешната устойчивост.

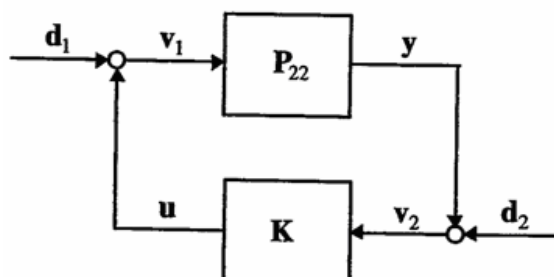
Въпросът, който си поставяме тук, е колко голяма в смисъл на  $\mathbf{H}_\infty$  норма може да бъде неопределеността така, че системата с обратна връзка да бъде устойчива.. Този въпрос се решава с теоремата за малката константа, следвайки идеята, че неопределеността  $\Delta$  може формално да се разглежда като управление за “техническата система”  $\mathbf{M}_{11}$  (Фиг.7.7). Формулира се достатъчно условие за робастно качество за неопределеност от такъв вид.

Неопределеността се разглежда като произволен елемент от  $\mathcal{RH}_\infty$  и големината на смущението  $\Delta$  както и големината на системата  $\mathbf{M}_{11}$  се изразяват чрез техните максимални сингулярни стойности  $\bar{\sigma}$ . В много приложения това множество от възможни смущения е твърде голямо и следва да бъде ограничено до по-малко. Тогава смущенията принадлежат на структурно множество. Това води до структурната сингулярна стойност  $\mu$ , което измерва големината на системата  $\mathbf{M}_{11}$  за този по-общ тип неопределеност и обобщава  $\bar{\sigma}$ . Не съществуват формули за пресмятане на  $\mu$ , но се получават горна и долна граници, които водят до значително по-точни оценки за  $\mu$ . Разглеждат се също робастна устойчивост и робастно качество за смущения принадлежащи на структурно множество. За тази цел е необходимо обобщение на теоремата за малката константа и необходими и достатъчни условия за робастна устойчивост и робастно качество.

Основавайки се на тези разглеждания, се изучава алгоритъм (итерация), по който се синтезира управление с робастно качество и робастна устойчивост. Междина стъпка при тази процедура е синтезът множество  $\mathbf{H}_\infty$  оптимални управления. Така получените  $\mu$  оптимални управления типично имат висок ред и се появява необходимостта да бъдат заменени с управления от по-нисък ред. Тук се обсъжда един подход в това направление.

### 8.1. Теорема за малката константа

Разглеждаме обща система с обратна връзка, за която веригата на обратната връзка е изобразена на Фиг.8.1, и чиято предавателна функция е  $L_o = -P_{22}K$ .

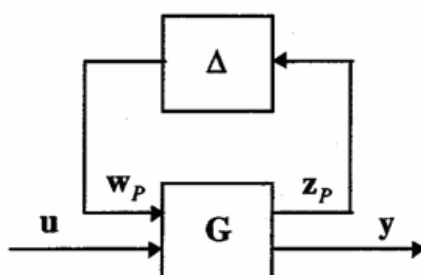


Фигура 8.1. Диаграма за вътрешна устойчивост

**Теорема (за малката константа).** Нека  $P_{22} \in \mathcal{RH}_\infty$ ,  $K \in \mathcal{RH}_\infty$  и допълнително  $\|L_o\|_\infty < 1$ . Тогава системата с обратна връзка е коректно поставена и вътрешно устойчива.

Достатъчното условие на тази теорема може да бъде много консервативно, но то не би могло да бъде смекчено, ако се вземе под внимание единствено големината на  $\|L_o\|_\infty$ . По отношение на синтеза на управление теоремата за малката константа не играе важна роля. Тя играе ключова роля при оценяването на дестабилизиращия ефект на моделираните неопределености.

Ние разглеждаме неопределена система  $G$  (Фиг.8.2). Нека  $G$  е устойчива и нека  $\Delta$  е произволно устойчиво смущение ограничено по норма  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ . Възниква въпросът колко голяма може да бъде  $G$  в смисъл на  $H_\infty$  норма така, че системата да бъде вътрешно устойчива.



Фигура 8.2. Неструктурирана неопределеност за линейна система

За да отговорим на този въпрос, разглеждаме предавателната функция от  $u$  към  $y$  за смутената система. Тя може да бъде представена във вида

$$\mathcal{F}_u(G, \Delta) = G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}.$$

Тъй като  $\mathbf{G}$  и  $\Delta$  са устойчиви, то  $\mathcal{F}_u(\mathbf{G}, \Delta)$  ще бъде устойчива, ако  $(I - G_{11}\Delta)^{-1}$  е устойчива. Ако приемем, че  $\|G_{11}\|_\infty < \gamma$  и  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ , то умножаването на  $H_\infty$  нормата дава

$$\|\mathbf{G}\Delta\|_\infty \leq \|\mathbf{G}\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1$$

и теоремата за малката константа подразбира, че  $(I - G_{11}\Delta)^{-1}$  е устойчива. Следователно условието  $\|G_{11}\|_\infty < \gamma$  е достатъчно за устойчивостта на  $\mathcal{F}_u(\mathbf{G}, \Delta)$  за произволно устойчиво смущение  $\Delta$ , за което  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ .

И така, ако  $\mathbf{G}_{11} \in \mathcal{RH}_\infty$  и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

(1)  $\|G_{11}\|_\infty < \gamma$

(2) Предавателната матрица  $(I - G_{11}\Delta)^{-1}$  съществува и е устойчива за всички смущения  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$  и  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ .

Следва въпросът за вътрешната устойчивост на смутената система с обратна връзка (Фиг.8.2). Тъй като  $\mathbf{G}$  и  $\Delta$  са устойчиви, то системата е вътрешно устойчива тогава и само тогава, когато  $(I - G_{11}\Delta)^{-1}$  съществува и е устойчива с условията (1) и (2) дава следния резултат

Ако  $\mathbf{G} \in \mathcal{RH}_\infty$  и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

(1)  $\|G_{11}\|_\infty < \gamma$

(2) Смутената система (Фиг.8.2) е коректно поставена и вътрешно устойчива за всички смущения  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ , за които  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ .

## 8.2. Робастна устойчивост при устойчиви неструктурирани неопределености

### 8.2.1. Основни твърдения

Нека приложим току що изказаното твърдение към неопределена система с обратна връзка от общ вид (Фиг.7.5). Това дава следното твърдение за обратна връзка от общ тип.

Ако номиналната система с обратна връзка  $\mathbf{M} = \mathcal{F}_1(\mathbf{P}, \mathbf{K})$  е вътрешно устойчива и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

(1)  $\|\mathbf{M}_{11}\|_\infty \leq \gamma$

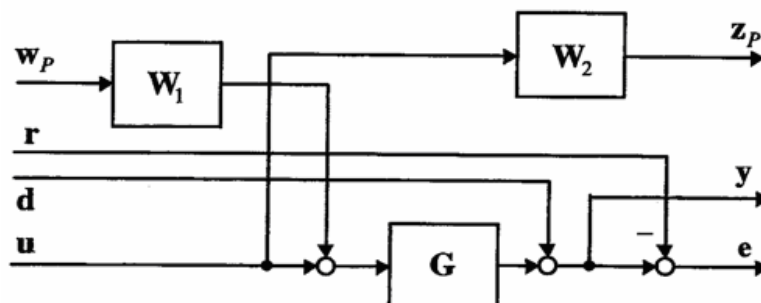
(2) Смутената система с обратна връзка (Фиг.7.5) е коректно поставена и вътрешно устойчива за всички смущения, за които  $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ .

За една от най-популярните неструктурирани неопределености – мултипликативно смущение при входа

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{G}, \Delta) = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_1 \Delta \mathbf{W}_2).$$

при стандартна обратна връзка (Фиг.8.3) получаваме

$$\mathbf{M}_{11} = -\mathbf{W}_2 \mathbf{T}_i \mathbf{W}_1.$$



**Фигура 8.3.** Разширена техническа система за входни мултипликативни смущения

В този случай, ако  $\Delta$  е мултипликативно смущение при входа, което е филтрирано със устойчиви тегла  $W_1$  и  $W_2$ , и освен това номиналната система с обратна връзка  $\mathcal{F}_1(\mathbf{G}, \mathbf{K})$  е вътрешно устойчива и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

(i)  $\|\mathbf{W}_2 \mathbf{T}_i \mathbf{W}_1\|_\infty \leq \gamma.$

(ii) Смутената система с обратна връзка е коректно поставена и вътрешно устойчива за всички смущения  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ , за които  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ .

### 8.2.2. Частни случаи

В този параграф разглеждаме частни случаи, при които е възможно оценяването на  $H_\infty$  нормата на  $\mathbf{M}_{11}$ .

**Системи с един вход и един изход и с обратна връзка по изход.** Това е класическа система с обратна връзка (Фиг.8.3). При  $W_1 = 1$  получаваме, че  $M_{11} = -W_2 F_r$ , което представлява частен случай на току що формулираните условия (1),(2).

Ако освен  $W_1 = 1$  имаме и  $W_2 = 1$ , то получаваме  $M_{11} = -F_r = S - 1$ . Ако кривата  $L(i\omega)$  избягва кръг с радиус R и център -1, то

$$\|S\|_\infty \leq \frac{1}{R}$$

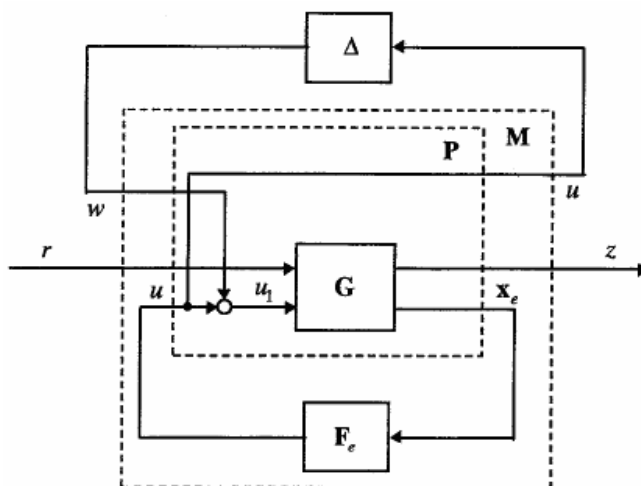
и  $\|\mathbf{M}_{11}\|_\infty$  може да бъде оценена. В този случай системата с обратна връзка е вътрешно устойчива за всички устойчиви смущения  $\Delta$ , за които

$$\|\Delta\|_\infty < \frac{R}{R+1}.$$

**Системи с един вход и един изход и с обратна връзка по състояния.** Такава система с мултипликативна неопределеност на входа е изобразена на Фиг.8.4. В този случай  $M_{11} = -L_i S_i$  и като се вземат предвид, че  $M_{11} = S_i - 1$  и от тук, че

$$\| \mathbf{M}_{11} \|_{\infty} \leq \| \mathbf{S}_i \|_{\infty} + 1, \quad (8.1)$$

то  $\| \mathbf{M}_{11} \|_{\infty}$  може да се оцени като се използва оценка за  $\| \mathbf{S}_{11} \|_{\infty}$ .



**Фигура 8.4.** Система с обратна връзка и входно мултипликативно смущение

Ако полюсите на затворената верига са адекватно избрани, то неравенството за  $\| \Delta \|_{\infty}$  може да се удовлетвори дори за  $R=1$ . Това означава, че системата с обратна връзка е устойчива за всички  $\Delta$ , за които

$$\| \Delta \|_{\infty} < 1/2.$$

Ако са взети предвид динамиката на управляващото устройство и на датчика, радиусът става по-малък.

**ЛК вериги с обратна връзка.** Разглеждаме система с обратна връзка и с мултипликативна неопределеност при входа. Обратната връзка е от вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}_2 \mathbf{x}.$$

Ням а външни входове и изходи, така че единствената задача е да бъде стабилизирана техническата система. Теглата са избрани единични матрици. Тогава имаме

$$\mathbf{M}_{11} = -(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i = -\mathbf{S}_i \mathbf{L}_i$$

и следователно

$$\| \mathbf{M}_{11} \|_{\infty} = \| -(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{L}_i \|_{\infty} = \| (\mathbf{I} + \mathbf{L}_i)^{-1} - \mathbf{I} \|_{\infty}.$$

и до неравенство (8.1).

Предполагаме, че тази система се стабилизира с ЛК управление. Тогава следва неравенството

$$(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega))^* (\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega)) \geq \mathbf{I} \quad (\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = \mathbf{0})$$

или за SISO системи

$$|1 + L(i\omega)| \geq 1.$$

Тогава получаваме за всяко  $\omega$

$$1 \leq \underline{\sigma}(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega)) \quad \text{следователно} \quad \bar{\sigma}((\mathbf{I} + \mathbf{L}_i(i\omega))^{-1}) \leq 1$$

От тук получаваме

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{L}_i)^{-1}\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{M}_{11}\|_{\infty} \leq 2.$$

и система с обратна връзка и ЛК управление с мултипликативна неопределеност на входа е робастно устойчива за всички устойчиви смущения, чиято норма изпълнява неравенството

$$\|\Delta\|_{\infty} < 1/2.$$

В Таблица 8.1 са дадени условията за вътрешна устойчивост за различни видове неопределеност.

**Таблица 8.1.** Тестове за робастна устойчивост

	Неопределена система	Критерий за робастна устойчивост
Адитивна неопределеност	$\mathbf{G}_p = \mathbf{G} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2$	$\ \mathbf{W}_2\mathbf{K}\mathbf{S}_o\mathbf{W}_1\ _{\infty} \leq 1$
Входна мултипликативна неопределеност	$\mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2)$	$\ \mathbf{W}_2\mathbf{T}_i\mathbf{W}_1\ _{\infty} \leq 1$
Изходна мултипликативна неопределеност	$\mathbf{G}_p = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2)\mathbf{G}$	$\ \mathbf{W}_2\mathbf{T}_o\mathbf{W}_1\ _{\infty} \leq 1$
Входна неопределеност в обратната връзка	$\mathbf{G}_p = \mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2)^{-1}$	$\ \mathbf{W}_2\mathbf{S}_i\mathbf{W}_1\ _{\infty} \leq 1$
Изходна неопределеност в обратната връзка	$\mathbf{G}_p = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2)^{-1}\mathbf{G}$	$\ \mathbf{W}_2\mathbf{S}_o\mathbf{W}_1\ _{\infty} \leq 1$

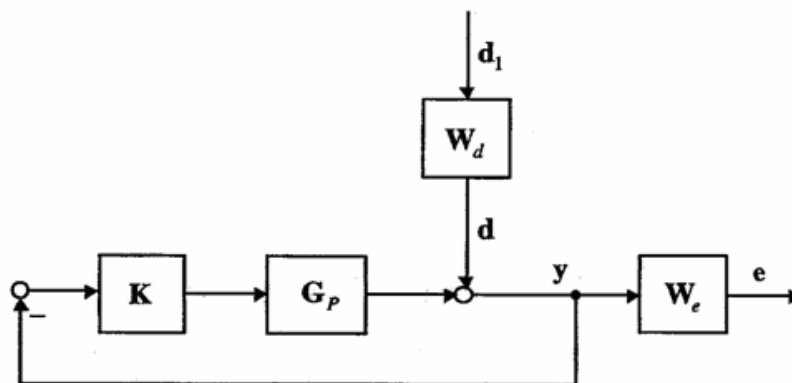
Накрая нека разгледаме робастност при устойчиви неструктурни неопределености, като ще се ограничим със случая на мултипликативни неопределености при изхода. Тогава неопределената техническа система е (Фиг.8.5)

$$\mathbf{G}_p = (\mathbf{I} + \mathbf{W}_1\Delta\mathbf{W}_2)\mathbf{G}.$$

Тук изискването за дадено качество е изискване за  $\mathbf{H}_{\infty}$  нормата на  $\mathbf{F}_{ed_1}$ . Чрез адекватна нормализация това изискване може да бъде формулирано за нормалната техническа система във вида

$$\|F_{ed_1}\|_{\infty} \leq 1$$

Веригата на обратната връзка има робастно качество, ако това е изпълнено за всички технически системи, които са смутени от допустимо смущение. Допълнително, следва да се изиска системата с обратна връзка е робастно устойчива.



Фигура 8.5. Блок диаграма за робастно качество

Като се използва подходящ тест за робастна устойчивост, се установява, че робастната устойчивост и робастното качество се постигат тогава и само тогава, когато са изпълнени следните условия:

$$\|W_2 T_o W_1\|_{\infty} \leq 1,$$

$$\|F_{\Delta e d_1}\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{за всяко } \Delta \in \mathcal{RH}_{\infty} \text{ с } \|\Delta\|_{\infty} < 1.$$

Предавателната функция  $F_{\Delta e d_1}$  на смутената техническа система се дава с формулата

$$F_{\Delta e d_1} = W_e S_o (I + W_1 \Delta W_2 T_o)^{-1} W_d.$$

Ако за смутената система  $G_p = (I + W_1 \Delta W_2)G$  имаме  $\Delta \in \mathcal{RH}_{\infty}$ ,  $\|\Delta\|_{\infty} < 1$  и  $K$  е управление, което стабилизира вътрешно номиналната система  $G$ , то робастно качество се гарантира, ако за всяка честота  $\omega$  е изпълнено следното условие

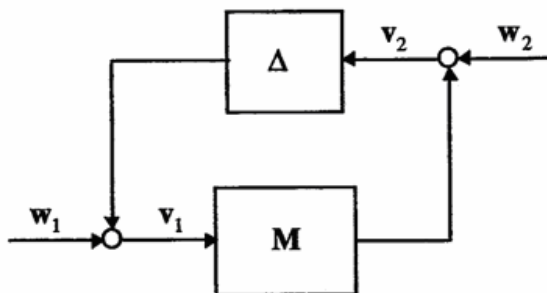
$$\bar{\sigma}(W_d(i\omega)) \bar{\sigma}(W_e(i\omega) S_o(i\omega)) + \bar{\sigma}(W_1(i\omega)) \bar{\sigma}(W_2(i\omega) T_o(i\omega)) \leq 1. \quad (8.2)$$

### 8.3. Структурирана сингулярна стойност $\mu$

#### 8.3.1. Основна идея и дефиниция

Разглеждаме система с обратна връзка (Фиг.8.6). Блок диаграмата на Фиг.8.6 съвпада с тази на Фиг.7.7 с тази разлика, че вместо  $M_{11}$  разглеждаме произволна устойчива предавателна матрица  $M$ . Подобно на ситуацията в теоремата за малкия коефициент, търсим колко голямо в смисъл на  $H_{\infty}$  норма може да бъде едно устойчиво

смущение  $\Delta$  така, че смутената система да остане устойчива. Тъй като за  $s$  с  $\text{Re}(s) > 0$  полюсите на системата с обратна връзка са нули на полинома  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta)$ , устойчивостта се постига тогава и само тогава, когато тази функция няма нула в  $\bar{\mathcal{C}}_+$ . До сега разглеждахме случая, когато за допустими смущения разглеждахме всички  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ . В много ситуации това множество е твърде голямо, така че е резонно да се разглеждат само онези смущения, които принадлежат на някакво по-малко множество, което ще означим с  $\mathcal{M}(\underline{\Delta})$ . Това води до **структурирани смущения**. Отново нашата задача е да търсим критерий за устойчивост.



**Фигура 8.6.** Диаграма за вътрешна устойчивост при смущения

Множеството от възможни смущения се определя така:

$$\mathcal{M}(\underline{\Delta}) = \{ \Delta \in \mathcal{RH}_\infty \mid \Delta(s) \in \underline{\Delta} \text{ за всяко } s \in \bar{\mathcal{C}}_+ \}.$$

Тук  $\underline{\Delta}$  е произволно затворено подмножество на  $C^{n \times m}$ , което следва да се намери по определен начин.

Нека е дадено  $\gamma > 0$  и приемем

$$\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \Delta \in \underline{\Delta}, \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta) = 0 \} \geq \frac{1}{\gamma} \text{ за всяко } s \in \bar{\mathcal{C}}_+.$$

Ако множеството, върху което търсим минимум е празно, то минимумът се приема  $\infty$  по дефиниция.

Нека  $\Delta(s)$  е смущение с  $\Delta \in \mathcal{M}(\underline{\Delta})$  и  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ . Тогава в частност  $\bar{\sigma}(\Delta(s)) < 1/\gamma$  и следователно

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta(s)) \neq 0 \text{ за всяко } s \in \bar{\mathcal{C}}_+.$$

Казаното до тук може да се формулира по следния начин:

Ако

$$\frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \Delta \in \underline{\Delta}, \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}(s)\Delta) = 0 \}} \leq \gamma \text{ за всяко } s \in \bar{\mathcal{C}}_+,$$

системата с обратна връзка е устойчива за всички  $\Delta \in \mathcal{M}(\underline{\Delta})$  и  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ .

**Дефиниция.** За произволна реална или комплексна  $m \times n$  матрица  $\mathbf{M}$  структурната сингулярна стойност е определя с

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) \mid \Delta \in \underline{\Delta}, \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0 \}}, \quad (8.3)$$

Ако съществува смущение  $\Delta \in \underline{\Delta}$  такава, че  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0$ . В противен случай нека  $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = 0$ .

Структурната сингулярна стойност е обобщение на обикновената сингулярна стойност.

Показва се, че ако  $\gamma > 0$  и ако

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}_{11}(s)) \leq \gamma \quad \text{за всяко } s \in \bar{\mathbb{C}}_+. \quad (8.4)$$

то веригата за обратна връзка на Фиг. 7.6 е вътрешно устойчива за всички  $\Delta \in \mathcal{M}(\underline{\Delta})$  и  $\|\Delta\|_{\infty} < 1/\gamma$ .

Това твърдение е по същество удобно преформулиране на дефиницията за робастна устойчивост в присъствието на структурни неопределености. Стои въпросът дали достатъчното условие (8.4) е и необходимо и съществуват ли методи за пресмятане на структурната сингулярна стойност.

### 8.3.2. Основни свойства на структурната сингулярна стойност $\mu$

Структурната сингулярна стойност  $\mu$  може да бъде оценена само ако множеството  $\underline{\Delta}$  има специална структура. Нека отначало разгледаме най-простия случай, когато  $\underline{\Delta}$  е цялото пространство от комплексни  $n \times m$  матрици. Тогава  $\mu$  съвпада с максималната сингулярна стойност  $\bar{\sigma}$ . Следователно структурната сингулярна стойност наистина обобщава максималната сингулярна стойност на една матрица, т.е.

ако  $\underline{\Delta} = C^{n \times m}$ , то  $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = \bar{\sigma}(\mathbf{M})$ .

Нека  $\underline{\Delta}$  е следното множество от  $n \times m$  матрици

$$\underline{\Delta} = \left\{ \text{diag} \left( \delta_1 \mathbf{I}_{r_1}, \dots, \delta_S \mathbf{I}_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F \right) \mid \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in C^{n_j \times m_j} \right\}. \quad (8.5)$$

Размерностите трябва да са такива, че

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F n_j = n, \quad \sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = m.$$

В дефиницията на  $\underline{\Delta}$  има два различни типа блокове – повтарящи се **скаларни блокове** и **пълни блокове**. За това множество  $\underline{\Delta}$  неопределеността винаги се очаква да бъде изразена чрез преносни функции. Ако управляемата система има неопределени параметри, трябва да има възможност за тип реални блокове, т.е. блокове от вида  $\delta \mathbf{I}$ , където  $\delta$  е реален параметър.

Структурната сингулярна стойност не е норма, но за нея и за всяко  $\alpha \in C$  е вярно следното съотношение:

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\alpha \mathbf{M}) = |\alpha| \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}).$$

Т.е. в някакъв смисъл  $\mu$  е мярка за дадена матрица. За преносни матрици  $\mathbf{M}(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$  дори е вярно следното съотношение:

$$\sup_{s \in \mathbb{C}_+} \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}(i\omega)). \quad (8.6)$$

Когато  $m = n$  и блокът е тип скаларен  $\underline{\Delta} = \{\delta I_n \mid \delta \in \mathbb{C}\}$ , то структурната сингулярна стойност е

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M}).$$

Когато  $m = n$  и блокът  $\underline{\Delta}$  има вида (8.5), то за структурната сингулярна стойност съществува следната оценка:

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \leq \bar{\sigma}(\mathbf{M}). \quad (8.7)$$

т.е. в случая спектралният радиус и максималната сингулярна стойност дават горна и долна граница за структурната сингулярна стойност  $\mu$ .

Когато  $m \neq n$ , се определя ново структурно множество  $\underline{\Delta}_e$  като всички неквадратни блокове в  $\underline{\Delta}$  се заместват с подходящо оразмерени квадратни блокове. Матрицата  $\mathbf{M}$  се заменя с нова матрица  $\mathbf{M}_e$ , която е квадратна и се получава от  $\mathbf{M}$  чрез добавяне на нулеви стълбове или редове така, че

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{M}_e \Delta_e) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{M} \Delta)$$

За всяко  $\Delta_e \in \underline{\Delta}_e$ . В този случай

$$\mu_{\underline{\Delta}_e}(\mathbf{M}_e) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}).$$

и получаваме оценка подобна на (8.7):

$$\rho(\mathbf{M}_e) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}).$$

Независимо от това, че неравенство (8.7) може да бъде много консервативно, то се използва за получаване на добри долна и горна граница за  $\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M})$ .

### 8.3.3. Оценки за $\mu$

Идеята да се използва ур. (8.7) за да се получат по-точни граници е да се замени матрицата  $\mathbf{M}$  с матрица, която има същата структурна сингулярна стойност, но друга най-голяма сингулярна стойност и друг спектрален радиус.

Започваме със случая  $m = n$  и въвеждаме следните множества

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{U} \in \underline{\Delta} \mid \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I} \right\},$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \text{diag}(\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_S, d_1 \mathbf{I}_{m_1}, \dots, d_F \mathbf{I}_{m_F}) \mid \mathbf{D}_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n_i}, \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i^* > \mathbf{0}, d_j > 0 \right\}.$$

За всяко  $\Delta \in \underline{\Delta}$ ,  $U \in \mathcal{U}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  са в сила следните равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U} &= \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}, & \bar{\sigma}(\mathbf{U}\Delta) &= \bar{\sigma}(\Delta\mathbf{U}) = \bar{\sigma}(\Delta), \\ \mathbf{D}\Delta &= \Delta\mathbf{D}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

За всеки  $U \in \mathcal{U}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  и множеството  $\underline{\Delta}$  се определя с ур. (9.5) са верни следните твърдения:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}\mathbf{U}) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{U}\mathbf{M}) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}), \\ (b) \quad & \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}). \\ (c) \quad & \sup_{U \in \mathcal{U}} \rho(\mathbf{U}\mathbf{M}) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}). \end{aligned} \tag{8.9}$$

За горната граница имаме [79]

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) = \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{D}^{-1}), \text{ ако } 2S + F \leq 3$$

Нека разгледаме случая, когато  $\mathbf{M}$  не е квадратна и за простота да приемем, че структурните множества  $\underline{\Delta}$  се съдържат повтарящи се скаларни блокове. Тогава  $\underline{\Delta}$  се записва във вида

$$\underline{\Delta} = \left\{ \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_F) \mid \Delta_j \in \mathbb{C}^{n_j \times m_j} \right\}. \tag{8.10}$$

За да дадем горна граница, подобна на (8.9), дефинираме матриците

$$\mathbf{D}_L = \begin{pmatrix} d_1 \mathbf{I}_{n_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & d_F \mathbf{I}_{n_F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_R = \begin{pmatrix} d_1 \mathbf{I}_{m_1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & d_F \mathbf{I}_{m_F} \end{pmatrix}$$

Параметрите  $d_1 > 0, \dots, d_F > 0$  ще наричаме  $\mathbf{D}$  –скали. За тези матрици свойството комутативност (8.8) се замества с

$$\mathbf{D}_L \Delta = \Delta \mathbf{D}_R.$$

Тогава за множеството  $\underline{\Delta}$ , дефинирано в (8.10) е валидно следното неравенство

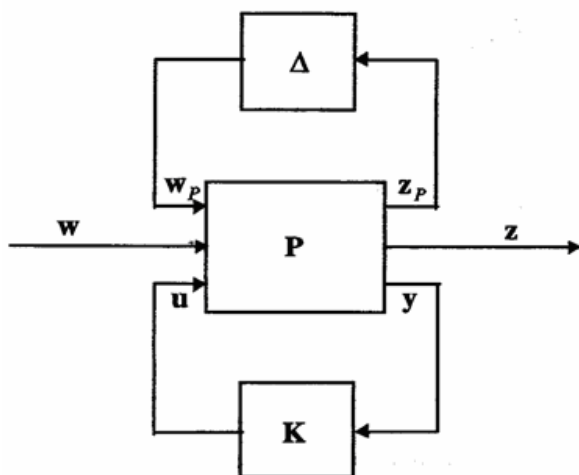
$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathbf{M}) \leq \inf \left\{ \bar{\sigma}(\mathbf{D}_R \mathbf{M} \mathbf{D}_L^{-1}) \mid d_i > 0, i = 1, \dots, F \right\}.$$

## 8.4. Структурни робастна устойчивост и качество

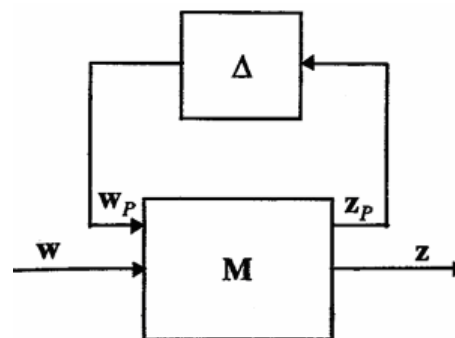
### 8.4.1. Робастна устойчивост

Разглеждаме блок диаграмата на Фиг.8.7 за обща схема за неопределена система с обратна връзка.  $\mathbf{P}$  е разширената техническа система, включваща оригиналната

”физическа” система  $G$  с теглата за качество и работност. Неопределеностите  $\Delta$  са избирани от техническата система.



**Фигура 8.7.** Обща схема за неопределена система с обратна връзка



**Фигура 8.8.** Смутена система с обратна връзка

Предполагаме, че те принадлежат на структурното множество  $\mathcal{M}(\underline{\Delta})$  с  $\underline{\Delta}$  определено в (8.5). С  $M$  е означена системата с обратна връзка без моделирани неопределености, т.е.  $M(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s))$  (Фиг.8.8). Условието, при които тази верига за обратна връзка със структурни моделирани неопределености е робастно устойчива, са следните:

Ако номиналната система с обратна връзка  $M = \mathcal{F}_l(P, K)$  е вътрешно устойчива и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

$$(a) \mu_{\underline{\Delta}}(M_{11}(s)) \leq \gamma \text{ за всяко } s \in \overline{C}_+ \quad (8.11)$$

(б) смутената система с обратна връзка на Фиг.8.8 е коректно поставена и вътрешно устойчива за всички смущения  $\Delta \in \mathcal{M}(\underline{\Delta})$  с ограничена норма  $\|\Delta\|_{\infty} < 1/\gamma$ .

От тук виждаме, че условие (8.4) е необходимо и достатъчно условие за робастна устойчивост. От ур. (8.6) следва, че условие (8.11) е еквивалентно на

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\underline{\Delta}}(M_{11}(i\omega)) \leq \gamma. \quad (8.12)$$

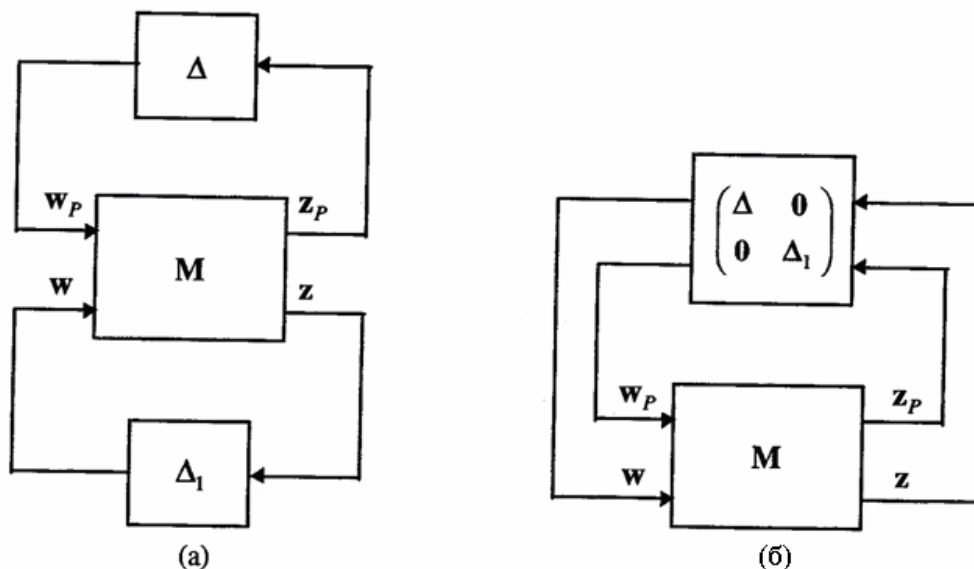
Следователно, ако  $\gamma$  е пикът на  $\mu$ -плот на  $M_{11}$ , то  $1/\gamma$  е максималната големвина на смущенията, за която веригата на обратната връзка е робастно устойчива.

### 8.4.2. Робастно качество

Качеството се измерва с  $H_{\infty}$  нормата на системата с обратна връзка. Предавателната функция на системата с обратна връзка включваща неопределеността е  $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ . Системата има робастно качество, ако тази норма е ограничена с определена

граница, т.е.  $\| \mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta) \|_\infty \leq \gamma$ , за всички допустими неопределености, чиито преносни функции  $\Delta$  са устойчиви и с ограничени норми.

Задачата за намиране на критерий за робастно качество може да се реши елегантно като качеството се разгледа като вид неопределеност (Фиг.8.9).



**Фигура 8.9.** Анализ на робастно качество: (а) добавяне на блок за качество; (б) структурирана неопределеност с блока за качество

Първата стъпка е неопределената система  $\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)$  с вход  $\mathbf{w}$  и изход  $\mathbf{z}$  е преорганизирана като система с обратна връзка с допълнителна неструктурна неопределеност  $\Delta_1$  като е сложено  $w = \Delta_1 z$  (Фиг.8.9а). Като втора стъпка неопределеностите  $\Delta$  и  $\Delta_1$  се обединяват в един блок (Фиг.8.9б). Тогава робастната устойчивост на системата е еквивалентна на робастната устойчивост и на робастното качество на оригиналната неопределена система с обратна връзка. Така, ако  $z \in R^{p_2}$  и  $w \in R^{q_2}$  и дефинираме

$$\underline{\Delta}_P = \left\{ \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_1 \end{pmatrix} \mid \Delta \in \underline{\Delta}, \Delta_1 \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2} \right\}.$$

и ако  $\underline{\Delta}_1 \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$ , то имаме

$$\mathbf{w}_P = \Delta \mathbf{z}_P, \quad \mathbf{w} = \Delta_1 \mathbf{z}.$$

Нека за две матрици

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}, \quad \Delta \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}.$$

дефинираме горна дробно -линейна трансформация като

$$\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta) = \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21} \Delta (\mathbf{I} - \mathbf{M}_{11} \Delta)^{-1} \mathbf{M}_{12},$$

като предполагаме, че обратната матрица  $(I - M_{11}\Delta)^{-1}$  съществува.

Веднага се вижда, че предавателната функция  $\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)$  на разглежданата неопределена система с обратна връзка представлява горна дробно-линейна трансформация.

Тогава условието за робастно качество се формулира по следния начин:

Ако номиналната система с обратна връзка  $\mathbf{M} = \mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \Delta)$  е вътрешно устойчива и  $\gamma > 0$ , то следните две твърдения са еквивалентни:

(а) За всяка  $\Delta \in \mathcal{M}(\Delta)$  с  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  системата с обратна връзка от Фиг.8.8 е коректно поставена, вътрешно устойчива и удовлетворява неравенството

$$\|\mathcal{F}_u(\mathbf{M}, \Delta)\|_\infty \leq \gamma. \tag{8.13}$$

(б) В сила е следното неравенство

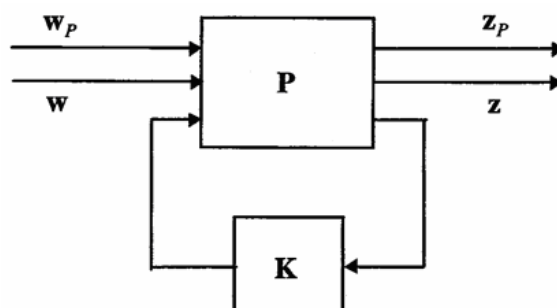
$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_p}(\mathbf{M}(i\omega)) \leq \gamma. \tag{8.14}$$

Следователно пикът на  $\mu$ -плота на  $\mathbf{M}$  дава големината на смущенията, за които веригата на обратната връзка е робастно устойчива и има робастно качество.

### 8.5. D-K итерация

**Основна идея.** Разглеждаме верига на обратна връзка (Фиг.8.10) с  $\mathbf{P}$  разширената техническа система, включваща оригиналната "физическа" система  $\mathbf{G}$  с теглата за качество и робастност и с вход  $w_p$  и изход  $z_p$  за включената неопределеност.

Нека  $\mathbf{M} = \mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \Delta)$  и да предположим, че управлението  $\mathbf{K}$  вече е синтезирано. Тогава максималната стойност на  $\|\Delta\|_\infty$  така, че системата с обратна връзка да е робастно устойчива и да има робастно качество е  $1/\gamma$ , където  $\gamma$  е точната горна граница в ур. (8.14).



**Фигура 9.10.** Система с обратна връзка с вход и изход за моделирани неопределености

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta P}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega)) \leq \gamma$$

Ние искаме да намерим управление  $\mathbf{K}$  такова, че точната горна граница да е най-малката възможна. Това води до следната оптимизационна задача:

Да се определи управление  $\mathbf{K}$  такова, че точната горна граница

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta P}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega)) \leq \gamma$$

(8.15)

да е най-малката възможна.

Такова управление е оптимално по отношение на робастната устойчивост и на робастното качество. Тази оптималност се отнася до определените тегла за качество и до структурата на неопределеността, които са дадени безусловно в разширената техническа система  $\mathbf{P}$ .

Тази задача може да се реши само приближено и в този параграф е представен един подход за нейното решаване.

Отначало разглеждаме случая, когато  $\mathcal{F}_l(\mathbf{M}, \mathbf{K})$  е квадратна предавателна функция.

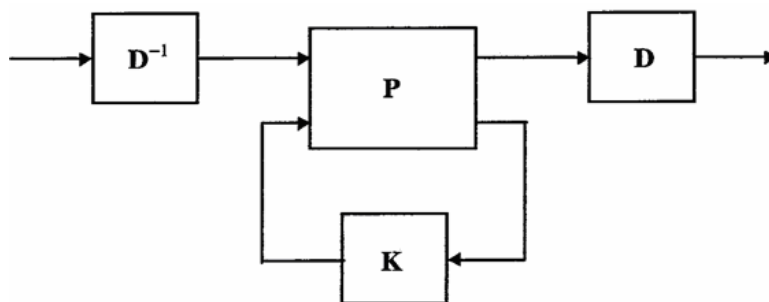
Първата стъпка е да се синтезира  $H_\infty$  управление  $\mathbf{K}$ . С това управление се пресмята структурната сингулярна стойност  $\mu_{\Delta P}(\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega))$  за всяка честота  $\omega$ . Използва се горната граница, при която се постоява скалираща матрица  $D_\omega$ , която е решение на оптимизационната задача

$$\inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}_\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega) \mathbf{D}_\omega^{-1}).$$

Това подразбира

$$\begin{aligned} \sup_j \inf_{\mathbf{D}_\omega \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}_\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega_j) \mathbf{D}_\omega^{-1}) &= \sup_j \bar{\sigma}(\mathbf{D}(i\omega_j) \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega_j) \mathbf{D}(i\omega_j)^{-1}) \\ &\approx \|\mathbf{D} \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K}) \mathbf{D}^{-1}\|_\infty = \|\mathcal{F}_l(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{K})\|_\infty. \end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{P}}$  е техническата система, която се получава от  $\mathbf{P}$  при прилагането на скалиращите преносни функции  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}^{-1}$  (Фиг.8.11). Едно ново  $H_\infty$  управление трябва да се пресметне за  $\hat{\mathbf{P}}$ . Входовете  $\mathbf{w}_p, \mathbf{w}$  и изходите  $\mathbf{z}_p, \mathbf{z}$  са написани като една величина.



Фигура 8.11. Скалирана техническа система

Алгоритъмът наречен **D-K итерация** се състои от две стъпки:

*Стъпка 1:* При дадена скалираща матрица  $\mathbf{D}$ , се изчислява  $\mathbf{H}_\infty$  управлението  $\mathbf{K}$  за техническата система  $\hat{\mathbf{P}}$ , която е скалирана чрез  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}^{-1}$ .

*Стъпка 2:* Минимизира се  $\bar{\sigma}(\mathbf{D}_\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega) \mathbf{D}_\omega^{-1})$  за всяка честота  $\omega$ . Това води до скалиращата матрица  $\mathbf{D}$ .

Сходимостта на този алгоритъм за сега не е доказана, но при практически приложения само с няколко стъпки се стига до управление, което е много близко до оптималното.

**Приложение на D-K итерацията за един частен случай.** Нека множеството  $\Delta$  има вида (8.10), т.е. няма тип скаларни блокове и пълните блокове могат да не са квадратни. Приемаме, че  $\mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})$  е  $m \times n$  предавателна матрица. В този случай лявата и дясната скалиращи матрици трябва да имат вида

$$\mathbf{D}_L^\omega = \text{diag}(d_1^\omega \mathbf{I}_{n_1}, \dots, d_{F-1}^\omega \mathbf{I}_{n_{F-1}}, \mathbf{I}_{n_F}),$$

$$\mathbf{D}_R^\omega = \text{diag}(d_1^\omega \mathbf{I}_{m_1}, \dots, d_{F-1}^\omega \mathbf{I}_{m_{F-1}}, \mathbf{I}_{m_F})$$

**D-K итерацията** се състои от следните стъпки:

1. За дадени скалиращи матрици  $\mathbf{D}_L(s), \mathbf{D}_R(s)$  се пресмята нова техническа система по формулата

$$\hat{\mathbf{P}}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_R(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{P}(s) \begin{pmatrix} \mathbf{D}_L(s)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

и се определя представяне в пространството на състоянията.

2. Синтезира се  $\mathbf{H}_\infty$  управление  $\mathbf{K}$ , което минимизира нормата

$$\|\mathcal{F}_l(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{K})\|_\infty.$$

3. Минимизира се

$$\bar{\sigma}(\mathbf{D}_R^\omega \mathcal{F}_l(\mathbf{P}, \mathbf{K})(i\omega_j) (\mathbf{D}_L^\omega)^{-1})$$

по всички допустими скалиращи матрици  $\mathbf{D}_L^\omega$  и  $\mathbf{D}_R^\omega$  за честотите  $\omega_1, \dots, \omega_J$ . В резултат се получават положителни числа

$$d_k^{\omega_1}, \dots, d_k^{\omega_J} \quad \text{за} \quad k = 1, \dots, F-1.$$

4. Определят се за  $k = 1, \dots, F-1$  преносни функции  $d_k \in \mathcal{RH}_\infty$  с  $d_k^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$  такива, че точките  $d_k^{\omega_j}$  са приблизително интерполирани в следния смисъл:

$$|d_k(i\omega_j)| = d_k^{\omega_j} \quad \text{за} \quad j = 1, \dots, J.$$

Тогава поставяме

$$\mathbf{D}_L(s) = \text{diag} \left( d_1(s)\mathbf{I}_{n_1}, \dots, d_{F-1}(s)\mathbf{I}_{n_{F-1}}, \mathbf{I}_{n_F} \right),$$

$$\mathbf{D}_R(s) = \text{diag} \left( d_1(s)\mathbf{I}_{m_1}, \dots, d_{F-1}(s)\mathbf{I}_{m_{F-1}}, \mathbf{I}_{m_F} \right).$$

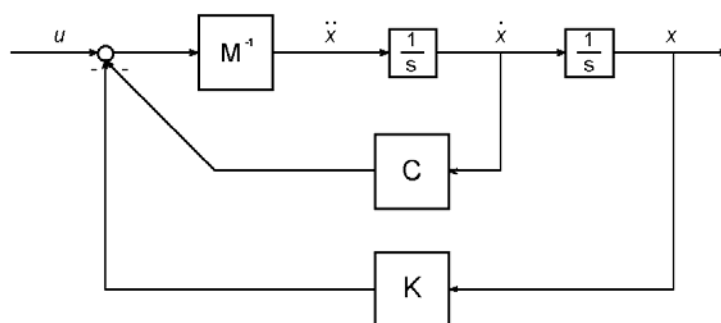
5. Сравняваме числата  $d_k^{\omega_1}, \dots, d_k^{\omega_j}$  с тези от предишната стъпка. Ако са приблизително същите, спираме алгоритъма. В противен случай продължаваме със стъпка 1.

## 8.6. Синтез на робастно управление за интелигентни структури

**Математически модел.** В този параграф ще разгледаме динамичен модел на структура (интелигентни композитни греди и плочи) подложени на външни динамични влияния. Ще синтезираме активно управление за тях, което намалява големите премествания и напрежения в тези структури, породени от динамичните натоварвания. Редуцирането на реакцията на структурата става чрез подаване на сили, противоположни на реакцията. Структурата е моделирана с метода на крайните елементи и динамиката на структурата се описва със система обикновени диференциални уравнения от вида:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{H}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t), \quad (8.16)$$

където  $\mathbf{X}(t)$  е векторът на преместванията и векторът  $\mathbf{u}(t)$  съдържа управляващите сили.  $\mathbf{M}$  е матрицата на масата,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  са матриците на дъмпинга и на коравината,  $\mathbf{H}$  е матрица, указваща разположението на управляващите сили, и  $\mathbf{F}(t)$  е векторът на външните влияния. Всички матрици с подходящи размерности са константни и реални. Диаграмата на управляемата система е дадена на Фиг.8.12.



Фигура 8.12. Блок диаграма на ур. (8.16) на системата.

Математическият модел (8.16) дава изображение от входовете към реакцията на сградата. Разглеждаме изходен вектор от вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}, \quad (8.17)$$

съдържащ измерванията, представляващи векторът на състоянията на структурата  $\mathbf{x}$ . Уравнения (8.16)-(8.17) са представяне на техническата система в пространството на

състоянията. Качеството на модела се определя от това колко точно реакциите му съответстват на реакциите на реалната структура.

**Моделирана неопределеност.** Предполагаме, че и трите физически параметъра  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , и  $\mathbf{K}$  в ур. (8.16) не са известни точно, но принадлежат на известни интервали. В частност, действителната маса  $\mathbf{M}$  се отклонява от номиналната маса  $\bar{\mathbf{M}}$  до  $p_M$  процента, действителната стойност на дъмпинг  $\mathbf{C}$  се отклонява от номиналната си стойност  $\bar{\mathbf{C}}$  до  $p_C$  процента и коравината  $\mathbf{K}$  се отклонява от номиналната си  $\bar{\mathbf{K}}$  до  $p_K$  процента. Приемаме номиналните матрици  $\bar{\mathbf{M}}$ ,  $\bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{\mathbf{K}}$  да имат диагонален вид

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{m}\mathbf{I} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{c}\mathbf{I} \quad \bar{\mathbf{K}} = \bar{k}\mathbf{I} \quad (8.18)$$

Въвеждаме смущения в диагонален вид:

$$\Delta_M = \delta_M \mathbf{I} \quad \Delta_C = \delta_C \mathbf{I} \quad \Delta_K = \delta_K \mathbf{I} \quad (-1 \leq \delta_M, \delta_C, \delta_K \leq 1), \quad (8.19)$$

които се предполагат неизвестни, но могат да бъдат измервани. Тогава физическите параметри могат да бъдат представени във вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{M}} + p_M \Delta_M = \bar{m}(1 + p_M \delta_M) \mathbf{I} \\ \mathbf{C} &= \bar{\mathbf{C}} + p_C \Delta_C = \bar{c}(1 + p_C \delta_C) \mathbf{I} \\ \mathbf{K} &= \bar{\mathbf{K}} + p_K \Delta_K = \bar{k}(1 + p_K \delta_K) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (8.20)$$

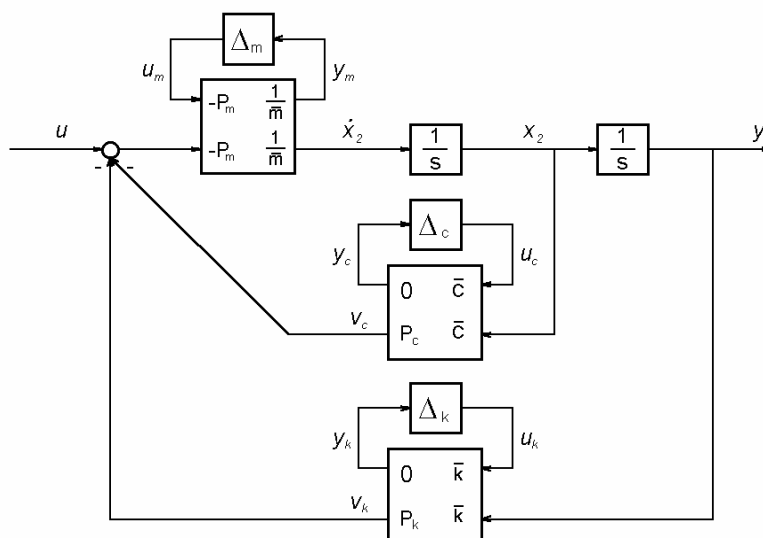
Неопределеностите в матриците  $\mathbf{M}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{K}$  могат да се представят с дробно линейни трансформации (горни) (ДЛТ) чрез  $\Delta_M$ ,  $\Delta_C$  и  $\Delta_K$  по следния начин:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathcal{F}_U \left( \begin{bmatrix} -p_M \mathbf{I} & \frac{1}{\bar{m}} \mathbf{I} \\ -p_M \mathbf{I} & \frac{1}{\bar{m}} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \Delta_M \right) \quad \mathbf{C} = \mathcal{F}_U \left( \begin{bmatrix} 0 & \bar{c} \mathbf{I} \\ p_C \mathbf{I} & \bar{c} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \Delta_C \right) \quad \mathbf{K} = \mathcal{F}_U \left( \begin{bmatrix} 0 & \bar{k} \mathbf{I} \\ p_K \mathbf{I} & \bar{k} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \Delta_K \right) \quad (8.21)$$

Така задачата за синтез на управление ще бъде формулирана чрез ДЛТ използвайки  $H_\infty$  техника. Полезна интерпретация на ДЛТ е като номинално изображение (първият член на първия ред), което е смутено чрез  $\Delta$ , докато другите членове отразяват предварително познаване как смущенията въздействат на номиналното изображение. Ето защо ДЛТ е особено полезна при изучаването на смущения, които са във фокуса на този параграф. Входовете на динамичната система (8.16)-(8.17) са  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}(t)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{X}}(t)$ , и  $\mathbf{F}(t)$ , а изходите са  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1$ , т.е. системата (8.16)-(8.17) приема вида

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}_1 - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{x}_2 + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u} . \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (8.22)$$

За да бъде представен моделът като ДЛТ на параметрите на натуралната неопределеност  $\delta_M$ ,  $\delta_C$ ,  $\delta_K$ , първо изолираме параметрите на неопределеността и означаваме входовете на  $\Delta_M$ ,  $\Delta_C$ ,  $\Delta_K$  като  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_c$ ,  $\mathbf{u}_k$  и изходите като  $\mathbf{u}_m$ ,  $\mathbf{u}_c$ ,  $\mathbf{u}_k$ . Блок диаграмата на системата (8.22) приема вида на Фиг.8.13.



Фигура 8.13. Блок диаграма за системата с неопределени параметри.

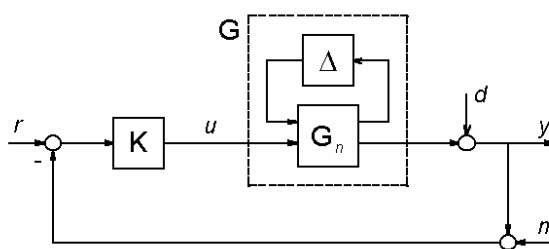
Разширената система в матрична форма има вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ y_m \\ y_c \\ y_k \\ \dots \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} I & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} I & | & -p_m I & -\frac{p_c}{\bar{m}} I & -\frac{p_k}{\bar{m}} I & | & \frac{1}{\bar{m}} I \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} I & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} I & | & -p_m I & -\frac{p_c}{\bar{m}} I & -\frac{p_k}{\bar{m}} I & | & \frac{1}{\bar{m}} I \\ 0 & \bar{c} I & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \bar{k} I & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \dots & \dots & | & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ I & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ u_m \\ u_c \\ u_k \\ \dots \\ u \end{bmatrix} \quad (8.23a)$$

$$\begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_M & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_C & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_c \\ y_k \end{bmatrix} \quad (8.23b)$$

Матрицата в ур. (8.23a) е известна и я означаваме с  $G$ . Матрицата на моделираната неопределеност на системата в ур. (8.23b) е структурна матрица и я означаваме с  $\Delta$ . Тя има блок диагонална структура (ур. (8.5)) и влияе на входно/изходната връзка между управлението  $u$  и изхода  $y$  по начин, който може да се представи като обратна връзка чрез горна ДЛТ  $y = \mathcal{F}_U(G, \Delta)u$ .

**Свойства на обратната връзка.** Задачата е да постигнем желано качество, използвайки управление по обратна връзка при наличието на неопределеност. За тази цел нека разгледаме техническа система  $G$  с номинал  $G_n$  и управление  $K$  (Фиг. 8.14).



**Фигура 8.14.** Стандерна конфигурация на обратна връзка.

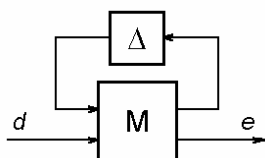
Тук  $r$  е входният сигнал, който трябва да се следва;  $d$  е входното смущение, което системата трябва да може да отхвърля;  $n$  е шумът от датчика;  $y$  е общият изходна затворената верига на системата, който трябва да бъде управляван;  $u$  е управляващият сигнал. Тогава в честотната област имаме следните уравнения (ур. (3.27),(3.33),(3.44),(3.45))

$$\begin{aligned} y(s) &= T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \\ u(s) &= K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \end{aligned} \quad (8.24)$$

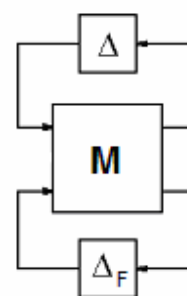
където  $S(s) = (I + GK)^{-1}$  е предавателната матрица на чувствителността и  $T(s) = GK(I + GK)^{-1}$  е предавателната матрица на допълнителната чувствителност. Ур. (8.24) показват целите на управлението по обратна връзка.  $S(s)$  трябва да бъде малко при ниски честоти и да нараства до едно при високи честоти, докато  $T(s)$  трябва да бъде едно при ниски честоти и да намалява при високи честоти. Междинните честоти типично управляват стойностите на фазата и на константата.

**Робастна устойчивост и робастно качество.** Критериите за робастна устойчивост и робастно качество варират с предположенията за описанието на неопределеността и с изискванията за качество. Те се разглеждат с общ подход с помощта на ДЛН и на структурната сингулярна стойност  $\mu$ .

За анализа на робастната устойчивост управлението  $K$  може да се разглежда като известна компонента на системата спрямо неопределеността и да се присъедини към общата структура  $M$  (Фиг.8.14, а също Фиг.8.9).



**Фигура 8.15.** Блок схема за анализ на робастна устойчивост



**Фигура 8.16.** Блок схема за анализ на робастно качество.

Ако матриците  $M$  и  $\Delta$  са устойчиви, то системата на Фиг. 8.15 ще бъде устойчива, ако  $\det(I - M\Delta) \neq 0$ . И така, ние търсим най-малкото смущение  $\Delta$ , реално и ограничено

по норма  $\|\Delta\|_\infty < 1$  в смисъл на  $\bar{\sigma}(\Delta)$ , което дестабилизира затворената верига на системата т.е.

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0 \quad (8.25)$$

Като строга оценка за робастна устойчивост за структурната неопределеност  $\Delta$  използваме структурната сингулярна стойност  $\mu$  (ур. (8.3)):

$$\mu_\Delta(\mathbf{M}) = \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{D}, \det(\mathbf{I} - \mathbf{M}\Delta) = 0\}} \quad (8.26)$$

и по-точно неравенствата (ур. (III.8.7))

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M) \quad (8.27)$$

където  $\rho(M)$  е спектралния радиус и  $\bar{\sigma}(M)$  е максималната сингулярна стойност на матрицата  $M$ . Ще припомним, че веригата на Фиг.8.15 е коректно поставена и вътрешно устойчива за всички  $\Delta$  с  $\|\Delta\|_\infty < 1$  тогава и само тогава, когато (ур. (8.12))

$$\sup_{\omega \in R} \mu_\Delta(M(j\omega)) < 1 \quad (8.28)$$

Следователно, максималният пик на  $\mu_\Delta$  плота за честотната реакция определя размерът на смущенията, за които веригата е робастно устойчива. Нека

$$\max_{\omega} \mu_\Delta[M(j\omega)] = \beta$$

Тогава за всяко смущение  $\Delta$  такова, че  $\sigma[\Delta(j\omega)] < 1/\beta$  смутената система ще бъде устойчива. Следователно величината

$$\frac{1}{\max_{\omega} \mu_\Delta[M(j\omega)]}$$

е резервът от устойчивост по отношение на структурна неопределеност влияеща на  $M$ .

Външните смущения, които въздействат на системата водят до грешки при следенето. Параметричните смущения в системата могат да увеличат значително ефекта на тези външни смущения. Като резултат качеството на затворената верига на системата може да бъде нарушено преди да бъде загубена устойчивостта. Ето защо трябва да се осигури робастно качество по отношение на дадено ниво смущения.

Качеството на системата се характеризира с помощта на  $\mathbf{H}_\infty$  нормата на дадена предавателна матрица, която норма трябва да бъде по малка от едно. ДЛТ  $\mathcal{F}_U(M, \Delta)$  (Фиг.8.15) постига добро качество, ако е устойчива за всички допустими  $\Delta$  удовлетворяващи  $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1$  и ако  $\|F_U(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$  за всички такива смущения.

Като приложим критерият на Никуист и теоремата за малкия коефициент е ясно, че  $\|F_U(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$  тогава и само тогава, когато веригата на Фиг.8.15 е устойчива за всяко  $\Delta_F$ . аи за всяко  $\Delta$  такива, че

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1 \quad \max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta_F(j\omega)] < 1$$

Но това е задачата за робастна устойчивост на  $\mathbf{M}$  с смущения

$$\Delta_P = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

Следователно, ние определяме робастната устойчивост за разширената система, използвайки допълнителна неопределеност и завършваме тази процедура с пресмятането на  $\mu_{\Delta_P}[M(j\omega)]$  и получавайки робастното качество за първоначалната система с неопределеност  $\mathcal{F}_U(M, \Delta)$ .

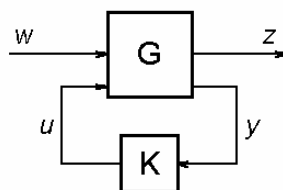
За намирането на характеристика за робастното качество в разглеждания случай на интелигентни структури с неопределеност избираме предавателната функция от външните смущения  $d$  към грешката в управлението  $e$ . Тази предавателна матрица е функция на  $\Delta$  чрез елементите на матрицата  $\mathbf{M}$  и на една ДЛТ. За да постигнем желаното качество, ние избираме за критерий следното неравенство за претеглената матрица на чувствителността

$$\|W_p(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1, \quad (8.30)$$

при избрана тегловна функция  $W_p$ . Ур. (8.30) подразбира, че максималната сингулярна стойност трябва да удовлетворява неравенството

$$\bar{\sigma}[(I + GK)^{-1}(j\omega)] < \left| \frac{1}{w_p(j\omega)} \right|.$$

**$H_{\infty}$  управление.** Нека разгледаме блок диаграмата на системата, както е представена на Фиг.8.17 (също Фиг.8.11 и Фиг.8.10)



**Фигура 8.17.** Блок диаграма за синтез на  $H_{\infty}$  управление.

където всички входни сигнали  $d, u_m, u_c, u_k$  са включени във външния вход и всички сигнали  $y_m, y_c, y_k$ , характеризиращи ответната реакция на системата, са включени в грешката  $z$ . Тогава системата (8.23) може да се опише с уравнението

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = K(s)y \quad (8.31)$$

Предавателната матрица на затворената верига на системата (8.31) от  $w$  към  $z$  се дава с ДЛТ  $z = F_L(G, K)w$  по  $K$ . Така стигаме до следната задача [41] и [54]:

**Оптимално  $H_{\infty}$  управление с пълна информация:** Да се намери допустимо управление  $K(s)$  (крайно мерно и реално), което стабилизира вътрешно системата (8.30) за всички реални параметрични неопределености ограничени по норма ( $\|\Delta\|_{\infty} < 1$ ) такава, че да минимизира  $H_{\infty}$  нормата на предавателната функция от  $w$  към  $z$

$$\|F_L(G, K)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(F_L(G, K)(j\omega)) \rightarrow \min \quad (8.32)$$

Изобщо, тази предавателна функция съдържа мерки на робастността на номиналното качество и устойчивост.  $H_\infty$  нормата дава мярка за най-лошия случай на реакция на системата по един цял клас от входни смущения. Представянето на предавателната матрица  $G$  в пространството на състоянията се дава във вида

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (8.33)$$

Предполагаме, че са изпълнени условията  $(A1)_{H_\infty} - (A5)_{H_\infty}$  от § 6.2.1 за  $H_\infty$  задачата. Решението се строи на основата на уравненията на Рикати.

В случая е достатъчно да се построи управление, което е близко до оптималното управление в смисъл на норма. Затова тук решаваме следната субоптимална задача:

**Субоптимално  $H_\infty$  управление:** За дадено число  $\gamma$ , да се намерят допустими управления  $K(s)$  такива, че

$$\|F_L(G, K)\|_\infty < \gamma \quad (8.34)$$

При предположения  $(A1)_{H_\infty} - (A5)_{H_\infty}$  от § 6.2.1 съществува допустимо управление, удовлетворяващо неравенство (9.34) тогава и само тогава, когато са изпълнени условията **(i)**, **(ii)**, **(iii)** от § 6.2.1, а именно

1. Съществува матрица  $X_\infty \geq 0$ , която е решение на алгебричното уравнение на Рикати (ур. (6.5))

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

2. Съществува матрица  $Y_\infty \geq 0$ , която е решение на алгебричното уравнение на Рикати (ур. (6.5))

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0$$

3.  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

Субоптималното управление има следното представяне в пространството на състоянията (ур. (6.4))

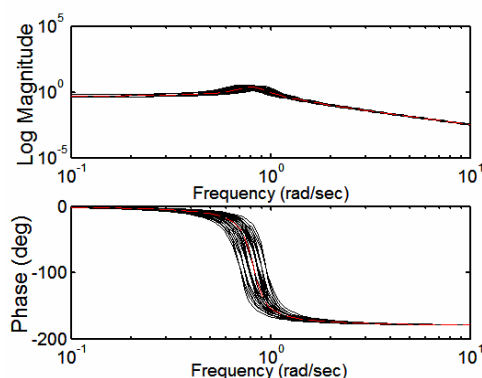
$$K_{sub} = \left[ \begin{array}{c|c} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right] \quad (8.35)$$

където

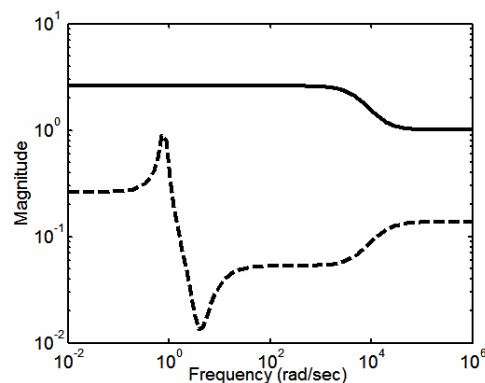
$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

**Числени симулации.** Тук разглеждаме двумерен случай на интелигентна структура, моделирана с три крайни елемента. Всеки елемент има два възела и всеки възел има три степени на свобода: хоризонтално преместване, вертикално преместване и ротация. Параметрите на системата са избрани по следния начин:  $\bar{m} = 3$ ,  $\bar{c} = 0.5$ ,  $\bar{k} = 2$  и  $p_M = 0.1$ ,  $p_C = 0.2$ ,  $p_K = 0.2$ . Реакцията на отворената верига на смутената система е показана на Фиг.9.18. На Фиг.8.19 е показана графиката на сингулярната стойност на затворената верига на системата.



**Фигура 8.18.** Честотна реакция на отворената верига на смутената система



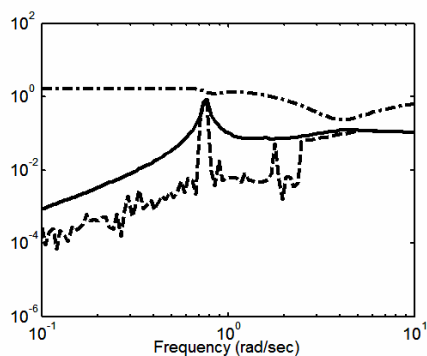
**Фигура 8.19.** Сингулярната стойност на системата с  $K_{sub}$  управление

Интервалът за числото  $\gamma$  в ур. (8.33) е избран [1;30] с толеранс 0.002. Минималната стойност на  $\gamma$  е равна на 2.59. Субоптималното управление е от четвърти ред и е получено във вида

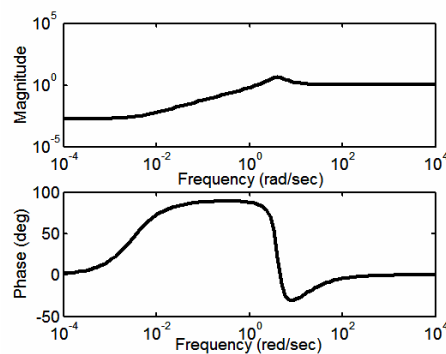
$$K_{sub}(s) = \frac{40150s^3 + 429280s^2 + 97000s + 264070}{s^4 + 6610s^3 + 66830s^2 + 129670s + 410}$$

$H_\infty$  нормата на затворената верига на системата е 2.67 и е по-голяма от 1 и изискване (8.30) не е изпълнено.

В MATLAB средата в съответствие с ур. (8.27) са пресметнати горна и долна граница за  $\mu_\Delta$ . Заключениета по отношение на робастната устойчивост се правят в термините на тези граници. За да се удовлетвори ур. (8.27) и да се постигне робастна устойчивост горната граница на  $\mu_\Delta$  трябва да бъде по-малка от 1. Смутенията на параметрите се предполагат реални, но за по-добра сходимост на алгоритъма на пресмятане на долната граница на  $\mu_\Delta$  са добавени 1% комплексни смущения. Честотната картина на горната и долната граница на  $\mu_\Delta$  са представени на Фиг.8.20. Вижда се, че затворената система с  $H_\infty$  управление достига робастна устойчивост. Максималната стойност на  $\mu_\Delta$  е 0.831 и, следователно робастната устойчивост е възможна при  $\|\Delta\|_\infty < 1.203$ .



**Фигура 8.20.**  $\mu_{\Delta}$  горна (плътна) и долна (пунктир) граници,  $H_{\infty}$  граница. (пунктир с точки)



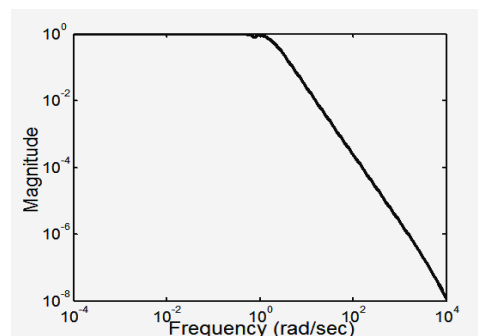
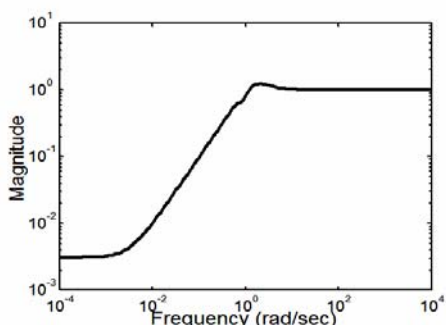
**Фигура 8.21.** Обратната на теглото за качество

Тегловната матрица за качеството в ур. (8.30) е взета във вида  $W_p(s) = w_p(s)I$ , където

$$w_p(s) = \frac{s^2 + 2.1s + 16}{s^2 + 9.5s + 0.03}$$

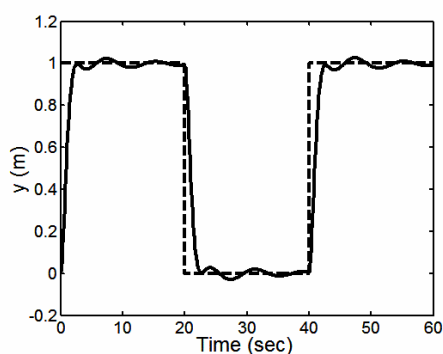
Което дава добро отхвърляне на смущенията и добра реакция във времето. Големината на максималната сингулярна стойност на предавателната функция на чувствителността трябва да лежи под обратната на тегловната функция за качеството за всички честоти. Обратната на тегловната функция за качеството на Фиг.8.21 сочи, че при ниски честоти затворената верига на системата може да отхвърля смущенията при изхода с отношение 10 към 0.01. Това изискване за качеството отслабва при високите честоти.

Честотната реакция на преносните матрици на чувствителността и на допълнителната чувствителност са показани на Фиг.8.22. Формите потвърждават добри свойства на обратната връзка.

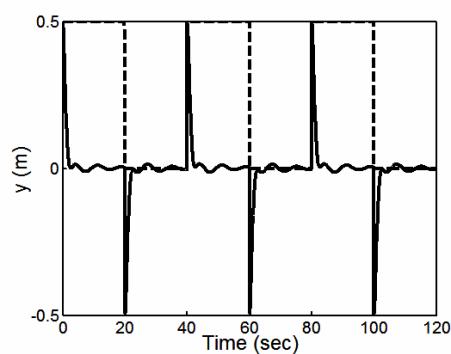


**Фигура 8.22.** Честотна реакция на преносните функции на чувствителността и на допълнителната чувствителност.

За да се демонстрира доброто поведение на затворената верига на системата при следене е направена числена симулация на системата на изследваната интелигентна структура, когато тя е подложена на периодичен управляем входен сигнал и при периодичен импулсен сигнал. Поведението ѝ във времето при следенето на такъв входен сигнал е показано на Фиг.8.23. Добра времева реакция на затворената верига при отхвърляне на смущенията при изолирани периодични смущения е показана на Фиг.8.24.

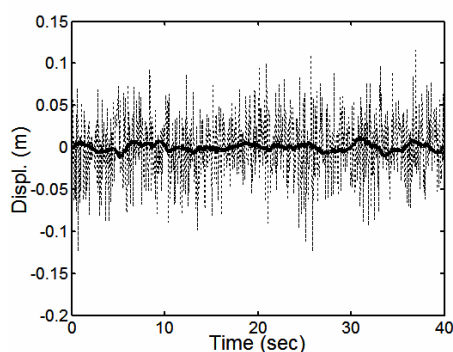


**Фигура 8.23.** Реакция на затворената верига при следене на периодичен вход



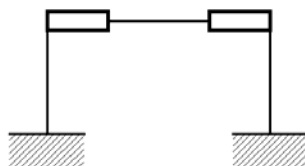
**Фигура 8.24.** Реакция на затворената верига при периодичен импулсен вход

Числени симулации са направени и когато интелигентната структура е подложена на случайни външни смущения, моделирани с бял шум. Сравнено е поведението във времето на системата с отворена и затворена верига на основата на редуциране на големината на хоризонталните отмествания. Времева реакция на структурата без управление и с  $H_{sub}$  управление е показана на Фиг.8.25.



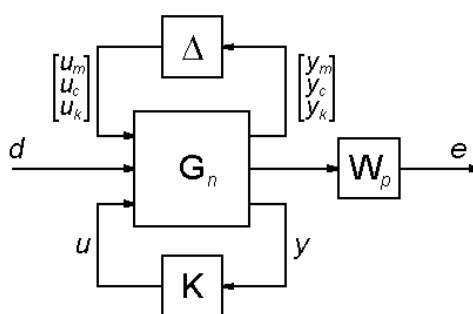
**Фигура 8.25.** Времева реакция на структурата без управление (точкова) и с  $H_{sub}$  управление(плътна)

Подобен подход е използван и при синтеза на управление за интелигентна сграда [42]. Разгледана е едноетажна сграда (Фиг.9.26), подложена на хоризонтално земетресения при основата. Нейната динамика се описва с модела в ур. (8.16).



**Фигура 8.26.:** Едноетажна сграда и разположение на управляващите устройства.

Затворената верига на неопределената система с обратна връзка е дадена на Фиг.8.27.



**Фигура 8.27.:** Затворената верига на неопределената система.

При числените експерименти тегловната функция за качеството е взета отново във вида  $W_p(s) = w_p(s)I$ , където

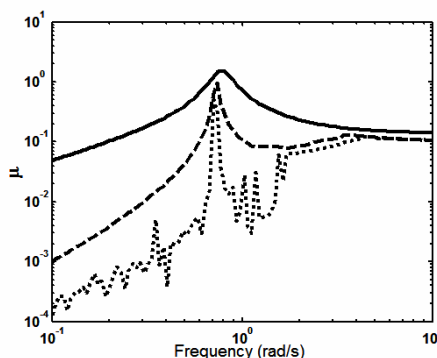
$$w_p(s) = \frac{s^2 + 2s + 10}{s^2 + 70s + 0.01}$$

е избрана така, че да дава добро отхвърляне на сеизмичните влияния.

При синтеза на  $H_\infty$  управлението числото  $\gamma$  варира в интервала  $[1;20]$  с толеранс 0.002. Намерената минимална стойност на  $\gamma$  е 2.0089. Субоптималното управление е намерено във вида

$$K_{sub}(s) = \frac{898s^3 + 62269s^2 - 8262s + 37705}{s^4 + 2340s^3 + 10823s^2 + 21838s + 4}$$

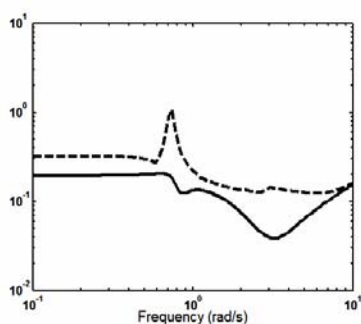
$H_\infty$  нормата на затворената верига на системата е намерена 2.00.



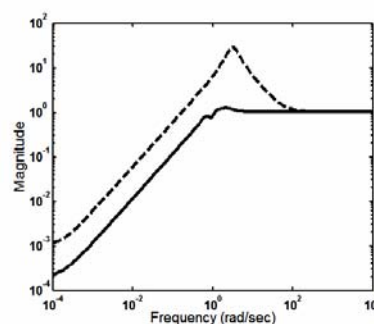
**Фигура 8.28.**  $H_\infty$  нормата на  $K_{sub}$  (плътна), долна (точкова) и горна (пунктирна) граници на  $\mu$

Честотното поведение на горната и долната граници на  $\mu$  са показани на Фиг.8.28. Вижда се, че затворената верига на системата с  $H_\infty$  постига робастна устойчивост. Максималната стойност на  $\mu$  е 0.965 и робастна устойчивост е възможна при  $\|\Delta\|_\infty < 1/0.965$ .

Честотното поведение на номиналното и робастното качество е показано на Фиг.8.29. Максимумът на номиналното и робастното качество са 0.20473 и 1.082 съответно и  $K_{sub}$  постига номинално и робастно качество. Матрицата на смущенията  $\Delta_G$  има норма  $\|\Delta_G\|_\infty = 1/1.082$  и за нея нормата на претеглената матрица на чувствителността е равна на 1.082.

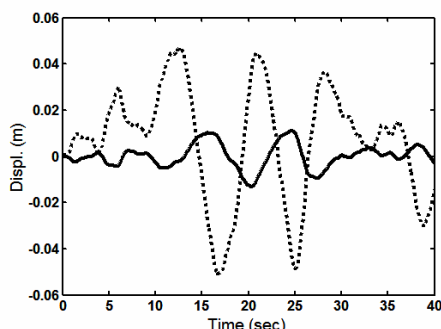


**Фигура 8.29.** Номинално (плътна) и робастно (пунктир) качество на  $K_{sub}$

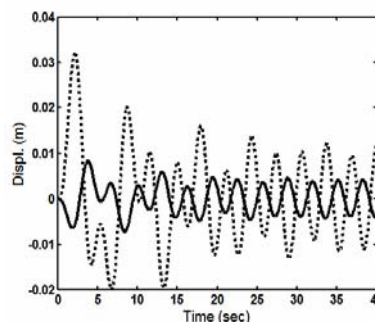


**Фигура 8.30:** Чувствителността (плътна) и обратната на теглото (пунктир) на  $K_{sub}$

$H_{\infty}$  нормата на затворената верига на системата е между 2.0089 и 2.0109 и е по-голяма от 1. Сравнявайки предавателната матрица на чувствителността и обратната на тегловната функция виждаме, че максималната сингулярна стойност на чувствителността лежи под обратната на тегловната матрица на качеството за всички честоти, което показва добро отхвърляне на сеизмическите влияния и добро времево поведение (Фиг.8.30).



**Фигура 8.31.:** Управляема (плътна) и неуправляема (точкова) система при бял шум



**Фигура 8.32.** Управляема (плътна) и неуправляема (точкова) система при силен вятър

За числените симулации са използвани два типа динамично натоварване на строителната структура приложени в хоризонтално направление, именно, случаен сигнал във вид на бял шум, моделиращо сеизмична дейност, и периодично синусоидално натоварване, моделиращо силен вятър [53]. Сградите имат значителна съпротива срещу динамични натоварвания във вертикална посока. В хоризонтална посока сградите са твърде уязвими към външни влияния. Ето защо е основателно да се изследва минимизирането на реакцията на сградата в хоризонтално направление. Поведението на системата с отворена верига нейното поведение при затворена верига се сравняват при числените експерименти. Сравнението се основава на редуцията на големината на максимума на хоризонталното преместване. Хоризонталните премествания на сградата при моделирани земетресение и силен вятър са представени на Фиг.8.31 и Фиг.8.32. Максималната големина на хоризонталното преместване при земетресение и силен вятър се редуцират с 80% и 74%, съответно.

## 8.7. Намаляване реда на управлението

### 8.7.1. Балансирани реализации

Редът на управлението получено от  $\mu$  синтеза е типично висок. Затова естествен въпрос е заменянето на оригиналното управление с управление от по-нисък ред, което приемливо да намалява свойствата на робастност и на качество на системата с обратна връзка. На този въпрос се обръща специално внимание в този труд като особено важен за практическото приложение на изследванията. В тази част ще бъде разгледан един възможен подход. На друг подход ще бъде отделено внимание в следващата част.

В § 6.3.1 с ур. (6.14) беше въведен оператор на наблюдаемостта

$$\Psi_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}_2[0, \infty)$$

който има свойството, че  $X_o = \Psi_o^* \Psi_o$ , където  $X_o$  е грамианът на наблюдаемостта. Тогава нормата на  $y = \Psi_o x_o$  се дава с формулата

$$\|y\|^2 = x_o^T X_o x_o. \quad (8.36)$$

Нека

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n \geq 0$$

са собствените стойности на матрицата  $X_o^{1/2}$ , а  $v_1, \dots, v_n$  са съответните собствени вектори. Като се приложи ур. (8.36) за собствените вектори, се получава

$$\|y\| = \eta_k \quad \text{за} \quad y = \Psi_o v_k.$$

Това равенство може да се интерпретира като информация за това, че при  $k > l$  състоянието  $v_k$  в някакъв смисъл е „по-наблюдаемо” от състоянието  $v_l$ .

Нека разгледаме оператора на управляемостта (ур. (6.11) § 6.3.1)

$$\Psi_c : \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

заедно с факта, че грамианът на управляемостта  $X_c$  се изразява чрез този оператор

$$X_c = \Psi_c \Psi_c^*.$$

Тогава множеството

$$R = \{ \Psi_c u \mid u \in \mathcal{L}_2(-\infty, 0] \text{ и } \|u\| \leq 1 \}. \quad (8.37)$$

може да се запише още във вида

$$R = \{ X_c^{1/2} x_c \mid x_c \in \mathbb{R}^n \text{ и } \|x_c\| \leq 1 \}. \quad (8.38)$$

което сочи, че състоянията, достижими чрез управление  $u$  с  $\|u\| < 1$  се дават чрез всичките вектори  $X_c^{1/2} x_c$ , където  $\|x_c\| < 1$ .

Нека

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$$

са собствените стойности на  $\mathbf{X}_c^{1/2}$  и  $w_1, \dots, w_n$  са съответните собствени вектори. Тогава

$$\|\mathbf{x}_0\| = \mu_k \quad \text{за} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_c^{1/2} \mathbf{w}_k.$$

Това сочи, че за  $k > l$  състоянието  $w_k$  е „по-управляемо” от състоянието  $w_l$ .

Идеята за „по-управляеми” и „по-наблюдаеми” състояния ще използваме, за да отстраним част от състоянията, които са „по-малко управляеми” и „по-малко наблюдаеми”, в случай че за матриците  $\mathbf{X}_c^{1/2}$  и  $\mathbf{X}_o^{1/2}$  имат обща система от собствени вектори.

Нека разгледаме устойчивата система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned} \tag{8.39}$$

и  $\mathbf{T}$  е неособена матрица на трансформация в пространството на състоянията такава, че

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T} \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1}$$

Тогава грамианът на управляемостта приема вида

$$\tilde{\mathbf{X}}_c = \int_0^{\infty} e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^T e^{\tilde{\mathbf{A}}^T t} dt = \int_0^{\infty} \mathbf{T} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T (\mathbf{T}^T)^{-1} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{T}^T dt = \mathbf{T} \mathbf{X}_c \mathbf{T}^T.$$

и грамианът на наблюдаемостта приема съответно вида

$$\tilde{\mathbf{X}}_o = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{X}_o \mathbf{T}^{-1}.$$

Ако  $\mathbf{A}$  е устойчива матрица и системата  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  е управляема и наблюдаема, от съществува трансформация  $\mathbf{T}$  на състоянията, при която грамианите на управляемостта и на наблюдаемостта на трансформираната система  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$

$$\tilde{\mathbf{X}}_c = \tilde{\mathbf{X}}_o = \mathbf{D}$$

където  $\mathbf{D}$  е положително определена диагонална матрица.

Реализация в пространството на състоянията, при която грамианите на управляемостта и на наблюдаемостта са равни и диагонални се нарича **балансирана реализация**. Ако  $G(s)$  е предавателна функция в  $\mathcal{RH}_\infty$ , то нейната минимална реализация ще има устойчива матрица  $\mathbf{A}$  и, следователно,  $G(s)$  ще има балансирана реализация. За тази балансирана реализация грамианите могат да се запишат във вида

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X}_o = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad \text{с} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0. \tag{8.40}$$

Числата  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  се наричат *сингулярни стойности на Ханкел*. Те са неотрицателните собствени стойности на оператора  $\Gamma_g^* \Gamma_g$ , където  $\Gamma_g = P_+ \circ F \circ P_-$  е операторът на Ханкел, асоцииран със системата (ур. (6.14)).

### 8.7.2. Балансирана редукция

Нека разгледаме балансирана реализация на дадена предавателна функция, чиито грамиани са дадени с ур. (8.40). Нашето желание е да приближим дадената система с друга система, чийто ред е по-малък от  $n$ . За целта нека фиксираме число  $r$  ( $0 < r < n$ ), за което

$$\sigma_r > \sigma_{r+1}$$

и разделяме реализацията на системата по съвместим начин

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2), \quad (8.41)$$

където  $\mathbf{A}_{11}$  е  $r \times r$  матрица. Приближението на оригиналната система се определя като

$$\mathbf{G}_r(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right).$$

Описаната техника за конструиране на  $G_r$  от  $G$  се нарича **балансирана редукция**.

Приближението (8.41) на системата (8.39) има следните свойства

(а) Матрицата  $\mathbf{A}_{11}$  е устойчива.

(б) Реализацията  $(\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1)$  е балансирана със сингулярни стойности на Ханкел  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ .

Следва да бъде оценена грешката  $G - G_r$  в  $H_\infty$  норма. Нека разгледаме различните сингулярни стойности в опашката

$$\sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} \geq \dots \geq \sigma_n.$$

и да ги означим с  $\sigma_1^t, \sigma_2^t, \dots, \sigma_k^t$  като предполагаме, че са наредени по големина

$$\sigma_1^t > \sigma_2^t > \dots > \sigma_k^t.$$

Доказва се, че е в сила следната оценка [79–80]

$$\| \mathbf{G} - \mathbf{G}_r \|_\infty \leq 2(\sigma_1^t + \dots + \sigma_k^t).$$

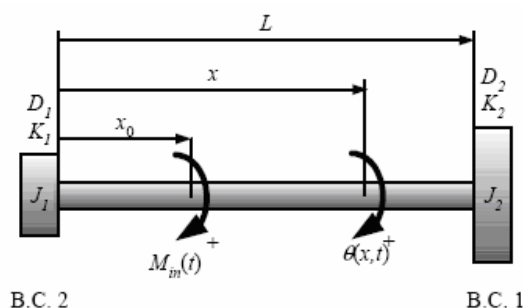
Балансирана редукция може да бъде приложена към всяка устойчива система, за техническата система и за управлението. В случая тя се използва за управлението. едно  $H_\infty$  или  $\mu$  оптимално управление не е необходимо устойчиво. Ако управлението  $K$  не е устойчиво, то се декомпозира на сума  $K = K_+ + K_-$ , където  $K_+$  съдържа полюсите в отворената лява полуравнина и  $K_-$  съдържа всички полюси в затворената

дясна полуравнина. Тогава балансираната реализация се пресмята за  $K_+$  и се получават сингулярните стойности на Ханкел (ур (8.40)). За избрано  $\varpi_r$  ( $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ )  $K_+$  се апроксимира с редуцираната система  $K_{+a}$  и се използва ново управление  $K_a = K_{+a} + K_-$ . Следва да се провери дали  $K_a$  не влошава твърде много устойчивостта и качеството.

### 8.7.3. Управление от нисък ред за гъвкава структура

Описаните по-горе подходи за управление често създават проблеми при прилагането им към структури поради голямата размерност на МКЕ моделите и малкия дъмпинг в системата [81–84]. Тук ще разгледаме един случай на специална форма на предавателната функция, високо структурирана и физически смислена, която позволява синтеза на управление от нисък порядък. Ще бъде построено управление по обратна връзка по скоростта при съвпадащи позиции на датчика и управляващото устройство, което изцяло елиминира вибрациите във веригата. Предавателната матрица се представя чрез крайномерна функция плюс неизбежно закъснение., отразяващо движението на вълната. Качеството на управлението се постига като съответният действащ край се поставя в положение противоположно по фаза на вълната. Разглежда се устойчивостта и робастността на синтезираното управление.

**Безкрайномерна предавателна функция.** Разглеждаме хомогенен прът, подложен на концентриран усукващ момент  $M(t)$  в точка  $x = x_0$



Фигура 8.33. Гъвкава система – прът

При отсъствие на вътрешен дъмпинг, уравнението на ъгъла на усукване се описва с вълновото уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{GI_p} \cdot M_{in}(t) \cdot \delta(x - x_0) \tag{8.42}$$

където  $\theta(x,t)$  е ъгълът на усукване на разстояние  $x$  от левия край на пръта,  $I_p$  е полярният момент на инерция,  $\rho$  е материалната плътност,  $G$  е срязващият еластичен модул и  $c = \sqrt{G/\rho}$  е скоростта на разпространение на вълната. Граничните условия са:

$$\begin{aligned}
 I_p G \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= J_1 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + D_1 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + K_1 \theta(x,t) & x=0 \\
 I_p G \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} &= - \left( J_2 \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2} + D_2 \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} + K_2 \theta(x,t) \right) & x=L
 \end{aligned}
 \tag{8.43}$$

където  $J_1, J_2, D_1, D_2, K_1, K_2$  са коефициентите на инерцията, дъмпинга и пружината в двата края на пръта.

Трансформацията на Лаплас спрямо времето превръща ЧДУ ур. (8.42) в ОДУ по  $x$ .

$$\frac{\partial^2 \theta(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} \theta(x,s) = - \frac{1}{GI_p} \cdot M_{in}(s) \delta(x-x_0)
 \tag{8.44}$$

и граничните условия придобиват вида

$$\begin{aligned}
 I_p G \frac{\partial \theta(x,s)}{\partial x} &= (J_1 s^2 + D_1 s + K_1) \theta(x,s) & x=0 \\
 I_p G \frac{\partial \theta(x,s)}{\partial x} &= - (J_2 s^2 + D_2 s + K_2) \theta(x,s) & x=L
 \end{aligned}
 \tag{8.45}$$

Решението на ур (9.44) се дава с формулата [82,84]

$$\theta(x,s) = - \frac{c M_{in}(s)}{4GI_p s} \left( e^{\left(\frac{s|x-x_0|}{c}\right)} - e^{-\left(\frac{s|x-x_0|}{c}\right)} \right) + C_1(s) e^{\left(\frac{sx}{c}\right)} + C_2(s) e^{-\left(\frac{sx}{c}\right)}
 \tag{8.46}$$

Замествайки (8.46) в граничните условия (8.45), намираме константите  $C_1(s)$ ,  $C_2(s)$  и получаваме предавателната матрица  $G(x, x_0, s)$  във вида

$$G(x, x_0, s) = \frac{1}{2\phi s} \cdot \frac{\left(1 + R_1(s) e^{-2(\eta-\beta)\tau s}\right) \left(1 + R_2(s) e^{-2(1-\eta)\tau s}\right)}{1 - R_1(s) R_2(s) e^{-2\tau s}} e^{-\beta\tau s}
 \tag{8.47}$$

където

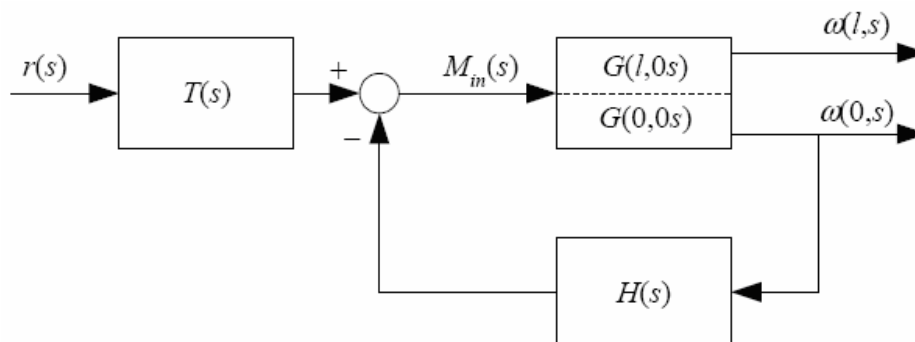
$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{GI_p}{c}, \quad \tau = \frac{L}{c}, \quad \gamma = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{x_0}{L} \\
 R_i(s) &= \frac{\phi s - (J_i s^2 + D_i s + K_i)}{\phi s + (J_i s^2 + D_i s + K_i)} \quad i=1,2 \\
 \beta &= \frac{|x-x_0|}{L}, \quad \eta = \frac{\max(x, x_0)}{L}
 \end{aligned}$$

Във ур. (8.47) е излявено чистото закъснение, което е  $\beta\tau$ . Закъснението в предавателната функция може да се обясни с вълна, бягаща по пръта. Тъй като  $c$  е

скоростта на разпространение на вълната, то  $\tau$  е времето, необходимо на вълната да премине от единия край на пръта до другия, и може да бъде разглеждано като времева характеристика на времето. Най-късият път за преминаване на вълната от една точка до друга на пръта е чистото закъснение, съществуващо в системата и появяващо се в ур. (8.47). Ще подчертаем различието на предложениия подход от модалния подход, където предвиждащите се вълни се описват като безкрайна сума от стоящи вълни.

$R_1(s), R_2(s)$  са коефициенти на движението, характеризиращи динамичното отразяване във всеки край на пръта. Интересни са някои частни случаи. Ако краят е свободен  $R_1(s) = 1, R_2(s) = 1$  и се връща същата вълната. Случаят на фиксирани краища на пръта се получава, когато  $K_1 \rightarrow \infty, K_2 \rightarrow \infty$  (по същия начин  $J_1 \rightarrow \infty, J_2 \rightarrow \infty$ ), от където следва, че  $R_1(s) = -1, R_2(s) = -1$  и се връща същата вълната, но с обратен знак. Това свойство е индикация за запазване на енергията, което съществува при системи без дъмпинг.

**Синтез на управление, подтискащо вибрациите-** Точната форма на безкрайномерната предавателна функция дава възможност да се построи много точно управление. Предполагаме, че позицията на измерването и на управлението съвпада с  $x = 0$ . Ще търсим управление по скорости (Фиг.8.34). Ще отбележим, че докато обратната връзка е затворена при  $\omega(0, s)$ , то качество може да се иска навсякъде при  $\omega(l, s)$ , където обикновено  $l = L$ .



**Фигура 8.34.** Управление с обратна връзка по скорост

Управлението има вида

$$M_{in}(s) = T(s)r(s) - H(s) \cdot \omega(0, s) \tag{8.48}$$

Нека разгледаме следната предавателна функция.

$$H(s) = \frac{2\phi R_1(s)}{1 + R_1(s)} \tag{8.49}$$

Комбиниране ур. (8.48) и ур. (8.47) при  $x_0 = 0$  (също  $\beta = \eta = 0$ ) и за предавателната функция на затворената верига получаваме

$$G_{CL}(x, 0, s) = \frac{\omega(x, s)}{r(s)} = \frac{T(s)G_\omega(x, 0, s)}{1 + H(s)G_\omega(0, 0, s)} = \frac{1}{2\phi} T(s) \left( 1 + R_2(s)e^{-2(1-\beta)\tau s} \right) e^{-\beta\tau s} \tag{8.50}$$

Предавателната функция от приложения усукващ момент към скоростта на ъгъла

$$G_{\omega}(x, 0, s) = sG(x, 0, s)$$

е еднаква с тази от ур. (8.47) с точност до множител  $s$  в знаменателя. Ясно е, че избраната  $H(s)$  елиминира закъснението в характеристичното уравнение в затворената верига. Това е възможно само, ако управлението е приложено в някой край на пръта, т.е. избора  $x=0$ . За  $x=L$  изразът за предавателната функция на затворената верига приема вида:

$$G_{CL}(x, 0, s) = \frac{\omega(L, s)}{r(s)} = \frac{s \cdot T(s)}{J_2 s^2 + (\phi + D_2)s + K_2} \cdot e^{-\tau s} \quad (8.51)$$

По-нататъшно опростяване можем да получим, ако предположим, че външното натоварване не съдържа пружина, което е обикновената ситуация при управляемите системи. С  $T(s) = \phi + D_2$  предавателната функция на затворената верига става предавателна функция от първи ред с коефициент едно и времева константа  $J_2/(\phi + D_2)$  и с неизбежно закъснение от едно  $\tau$ .

$$\frac{\omega(L, s)}{r(s)} = \frac{1}{\frac{J_2}{\phi + D_2} s + 1} e^{-\tau s} \quad (8.52)$$

Както може да се забележи от ур. (8.50), (8.51) или (8.52), предложеният закон на управление елиминира безкрайния брой полюси на вибриране. Специалната структура на това управление води до няколко извода.

1. Предложеното управление е функция само на свойствата на пръта (на материала и на напречното сечение) и на граничното условие в края, в който е приложено управлението. То не е функция на дължината на пръта и на граничното условие в натоварения край. Следователно това управление е робастно по отношение на изменения в натоварването.

2. Предавателната функция на затворената верига зависи само от натоварването и не зависи от свойствата на управлението.

3. При гранични условия – свободни краища или само дъмпер, управлението се превръща в чист коефициент.

4. Елиминирането на модите на вибрации в предавателната матрица на затворената система е постигнато чрез пълно абсорбиране на бягащата вълна, когато тя се връща от натоварения край към управляемия край на пръта [83,85].

По-подробно, изразът за управлението има вида

$$H(s) = \frac{2\phi R_1(s)}{1 + R_1(s)} = -J_1 s + (\phi - D_1) - \frac{K_1}{s} \quad (8.53)$$

и работи като ПД управление по скоростта.

**Устойчивост и робастност.** Устойчивостта на номиналната затворена верига е очевидна от израза на знаменателя на предавателната функция (8.51). Ако се разгледа система с управление  $kH(s)$ , може да се види, че при  $k=1$ , което е разглежданият случай, всички полюси клонят към  $-\infty$ . Това влияе не само на устойчивостта, но също и на качеството. В случай, че в краищата на пръта няма инерция, реакцията е моментална, значително по-бърза от всяко друго управление, основаващо се на крайномерен модел. В случай, че присъства инерция, реакцията е на свободна вълна и с форма на мода от първи ред. Друго предимство на предложеното управление е, че синтезът е прост и може лесно да се автоматизира. Друга черта на управлението е, че то зависи само от локалните свойства на пръта и не зависи пряко от натоварения край. При управления, построени с други методи, промяната на натоварването в зависимост от задачата може да влияе значително на устойчивостта и качеството им. В този смисъл можем да твърдим, че предложеното управление притежава абсолютна робастност и абсолютна абсорбция на вълните.

Нека разгледаме поведението на управлението при неопределеност. Беше предположено, че управляващото устройство и датчика са разположени в една и съща точка. Нека сега предположим, че управлението действа в точка  $x=0$ , а измерването е в точка  $x=\beta L$  ( $\beta=0$  е номиналният случай). Тогава предавателната функция на отворената верига ще бъде

$$H(s)G_{\omega}(\beta, 0, s) = \frac{R_1 \left(1 + R_2 e^{-2(1-\beta)\tau s}\right) e^{-\beta\tau s}}{1 - R_1 R_2 e^{-2\tau s}} \quad (8.54)$$

Допълнително предполагаме, че системата не притежава пружина.

Ако в натоварения край на пръта няма инерция, коефициентите на отразяване  $R_1(s), R_2(s)$  както и  $H(s)$  са константи

$$R_1 = \frac{\phi - D_1}{\phi + D_1}, \quad R_2 = \frac{\phi - D_2}{\phi + D_2}, \quad H(s) = \phi - D_1. \quad (8.55)$$

Предавателната функция на отворената верига приема вида

$$H(s)G_{\omega}(0, 0, s) = \frac{R_1 \left(1 + R_2 e^{-2\tau s}\right)}{1 - R_1 R_2 e^{-2\tau s}} \quad (8.56)$$

Затворената верига е устойчива за всеки дъмпинг. Когато замерването не е точно в точката  $x=0$ , а е в точка  $x=\beta L$  дори и с много малко  $\beta$ , системата губи своята устойчивост.

Ако в натоварения край на пръта има инерция, коефициентите на отразяване  $R_1(s), R_2(s)$  приемат вида

$$R_1 = \frac{\phi - D_1}{\phi + D_1}, \quad R_2 = \frac{-J_2 s + \phi - D_2}{J_2 s + \phi + D_2} \quad (8.57)$$

Тъй като крайт на пръта, където действа управлението няма инерция, управлението продължава да има вида  $H(s) = \phi - D_1$ . Когато  $s$  е голямо, т.е.  $j\omega$  е голямо, то  $R_1 \rightarrow -1, R_2 \rightarrow -1$  и системата отново губи устойчивост.

Тъй като системата става неустойчива при високи честоти, тя може да бъде направена робастна за малки несъвпадения на позициите на управляващото устройство и датчика, ако към управлението се добави ниско честотен филтър. Ако несъвпаденията са достатъчно малки, филтърът работи при достатъчни високи честоти и влошаването на качеството при ниски честоти и за времевата реакция е незначително. Числените експерименти показват, че филтър от първи ред би бил достатъчен, за да се стабилизира системата.



## 9. Робастно управление чрез **D** –декомпозиция

### 9.1. Предварителни бележки

Разглеждаме линейна система с характеристичен полином  $a(s, k)$ , който зависи от вектора на параметрите  $k$ . Границата на областта на устойчивост на системата в пространството на параметрите  $k$  се намира измежду решенията на уравнението:

$$a(j\omega, k) = 0, \quad \omega \in (-\infty, +\infty), \quad (9.1)$$

което представлява изображение на параметризираната имагинерна ос (границите на областта на устойчивост в равнината на корените) в пространството на параметрите.

Когато  $k \in \mathbb{R}^2$  (или  $k \in \mathbb{C}$ ), се получават две уравнения (за реалната и имагинерната част на ур. (9.1)) с две неизвестни, които в общия случай задават параметрична крива  $k(\omega), \omega \in (-\infty, +\infty)$ , която определя границите на областта на устойчивост. Тази крива разделя равнината на области с постоянно количество устойчиви корени на полинома  $a(s, k)$ . В това се състои основната идея на **D**–декомпозицията.

С възникването на задачите за робастно управление на системи с неопределеност **D**–декомпозицията се оказва ефективен подход при изследванията цели семейства линейни системи [86]. Когато се изследва устойчивостта, от особен интерес е въпросът, остава ли системата устойчива, ако нейните параметри са постоянни, но са неизвестни и принадлежат на някакво множество.

Методът на **D**–декомпозицията може да се приложи към системи, представени в пространството на състоянията. Нека е даден клас  $\mathcal{K}$  от  $n \times m$  матрици и нека потърсим всички матрици  $K \in \mathcal{K}$ , за които затворената верига на системата  $A + BKC$  е устойчива:

$$D = \{K \in \mathcal{K} : A + BKC \text{ устойчива}\}. \quad (9.2)$$

Тук  $A, B, C$  са дадени матрици с размерности  $n \times n$ ,  $n \times r$  и  $m \times n$ . Класът  $\mathcal{K}$  може да е различен, например:

$$\begin{aligned} K &= k \in \mathbb{R}^n \quad \text{или} \quad K = k^T, \quad k \in \mathbb{R}^n \quad (m = 1 \text{ или } r = 1), \\ K &= kI, \quad k \in \mathbb{R} \text{ или } k \in \mathbb{C}, \quad m = r, \\ K &\in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Първите два случая са случаи на системи с много входове и много изходи, докато третият случай е случай на система с един вход и един изход. При все това и към

трите случая е приложим общ подход в рамките на **D**-декомпозицията, който подход е много близък до  $\mu$  -  $\Delta$  конфигурацията.

Задача (9.2) възниква при синтез на управление и анализ на неговата робастност. Например, в задачата за намиране на управления по изход

$$u = Ky,$$

които статически стабилизируют системата

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{9.3}$$

областта  $D$  в ур. (9.2) може да се опише с  $\mathcal{K} = R^{r \times m}$ , където матрицата  $K$  съдържа параметрите на управлението. От друга страна, ако  $A$  е номиналната устойчива матрица на системата (9.3) и с  $A + BKC$  представим нейния смутен вид, където  $K$  е постоянна  $r \times m$  матрица, то ур. (9.2) описва всички възможни смущения, които запазват устойчивостта на системата. Ако знаем границата на областта на устойчивост  $\partial D$ , то може да се определи разстоянието до нея:

$$\rho = \min_{K \in \partial D} \|K\|. \tag{9.4}$$

Числото  $\rho^{-1}$  е тясно свързано със структурната сингулярна стойност  $\mu$  [41]. Ако класът  $\mathcal{K}$  са всички матрици  $C^{r \times m}$  ( $R^{r \times m}$ ), то  $\rho$  е спектралният комплексен (реален) радиус на устойчивост [87]. Но познаването на областта  $D$  представлява значително по-голям интерес от числото  $\rho$ .

Методът на **D**-декомпозицията дава възможност да се разглежда сектор или друга област на разполагане на корените. Информацията за разположението на корените вътре в областта на устойчивостта се оказва много полезна при задачите за синтез. В тази връзка възниква въпросът: каква е ползата от намирането на всички области с различно количество устойчиви корени, ако в повечето случаи е интересна само областта на устойчивост. Донякъде това е спецификата на метода на **D**-декомпозицията. Той предполага отначало описанието на границите на всички области, а след това отделянето на областта на устойчивост (ако тя съществува).

През 1991 г. е формулирана и решена за някои частни случаи задачата за робастна **D**-декомпозиция [88]. Тя се състои в следното. Отначало от всички параметри се отделят два реални (или един комплексен), останалите параметри са неопределени, но ограничени по норма. В равнината на отделените параметри се търси множество, за което полиномът е устойчив за произволни допустими стойности на неопределените параметри. Такава декомпозиция на параметрите на два класа е характерна за задачата на синтез на робастни управления със зададена структура.

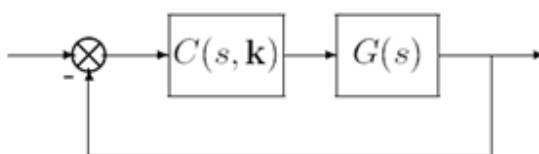
Една нова област на приложение на метода на **D**-декомпозицията е теорията на линейните матрични неравенства [22,89]. Тук методът позволява да бъдат определени всички области в пространството на параметрите, в които афинно семейство симетрични матрици има фиксирано количество собствени стойности с еднакъв знак.

## 9.2. Синтез на управление от нисък ред по $H_\infty$ критерий

При задачата за синтез на управление с нисък ред по  $H_\infty$  критерий се търси стабилизиращо управление, което освен условието за устойчивост на затворената верига на системата трябва да удовлетворява някои допълнителни изисквания към качеството на системата. В този параграф разглеждаме случая, когато показателят на качеството е  $H_\infty$  критерий. Ще отбележим, че  $H_\infty$  нормата е крайна само за дробно-рационални функции с устойчив знаменател ( $H(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ ).

Вече беше обсъждано, че редът на  $H_\infty$  може да бъде много висок, и в глава 8.7 беше разгледан един подход за неговото редуциране. Допълнително устойчивостта на затворената верига на системата е много чувствителна към параметрите на оптималното управление и често малкото им изменение води до неустойчивост [90–91].  $H_\infty$  теорията не позволява да бъде ограничен реда на синтезираното управление, затова прякото ѝ използване при задачите за синтез на управление със зададена структура се сблъсква със значителни трудности.

В тази глава се предлага алтернативен подход за синтез на управление със зададена структура, т.е. редът на управлението е фиксиран. Свобода има само при избора на параметрите на управлението. По такъв начин задачата се състои в намирането на област в пространството на параметрите, за която съответните управления стабилизират системата и гарантират изпълнението на  $H_\infty$  критерия. Важна особеност на предлагания тук подход е, че той позволява да бъдат описани всички такива управления, ако те съществуват.



Фигура 9.1. Схема на затворена система

Разглеждаме едномерна линейна стационарна система със скаларна предавателна функция  $G(s)$  и управление  $C(s, k)$  (Фиг. 9.1). Параметрите  $k \in R^m$ ,  $m \leq 3$  задават множеството от допустими управления от нисък ред, измежду които в частност могат да се разглеждат ПИ, ПИД и от първи ред управления

$$k_p + \frac{k_i}{s}, \quad k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s, \quad \frac{k_1 s + k_2}{s + k_3},$$

Задачата е да се опише множеството от параметри, съответстващи на всички управления удовлетворяващи критерия за качество

$$\|H(s, k)\|_\infty < \gamma. \tag{9.5}$$

Тези управления също ще наричаме  $H_\infty$  управления. Видът на предавателната функция  $H(s, k)$  може да бъде различен.  $H_\infty$  критерият възниква едновременно при

няколко постановки на задачата за синтез. Ето няколко примера и вида на съответната  $H(s, k)$ .

\* Намиране на управление  $C(s)$ , гарантиращо  $\mathbf{H}_\infty$  качество на затворената верига на системата

$$\|W_1(s)T(s)\|_\infty \leq \gamma,$$

където  $W_1(s)$  е тегловна функция ( $W_1^{-1}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ ),  $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$  е предавателната функция на затворената система (допълнителната чувствителност),  $\gamma$  е зададеното ниво на качеството.

\* Намиране на управление, робастно стабилизиращо семейство технически системи с адитивна неопределеност

$$G(s) = G_0(s) + \Delta G(s),$$

където  $G_0(s)$  е предавателната функция на номиналната техническа система,  $\Delta G(s)$  е непараметрична неопределеност, ограничена по претеглена норма  $\|W_2\Delta G(s)\|_\infty \leq 1$ . Задачата се състои в изпълнението на критерия

$$\|W_2^{-1}(s)U(s)\|_\infty \leq 1,$$

където

$$U(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)G(s)}, \quad W_2 \in \mathbf{RH}_\infty.$$

\* Намиране на управление, робастно стабилизиращо семейство технически системи с мултипликативна неопределеност

$$G(s) = G_0(s)(1 + \Delta G(s)),$$

съответства критерий [91,41,93]

$$\|W_2^{-1}(s)T(s)\|_\infty \leq 1.$$

Да приемем, че управлението стабилизира системата, т.е. знаменателят  $H(s)$  е устойчив. Тогава

$$\|H(s, k)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |H(j\omega, k)|,$$

където предавателната функция предполагаме записана във вида

$$H(s, k) = \frac{H_n(s, k)}{H_d(s, k)}.$$

Предполагаме, че числителят  $H_n(s, k)$  и знаменателят  $H_d(s, k)$  зависят линейно от параметрите  $k$ . Това е така за всички посочени задачи за ПИ, ПИД и от първи ред управления. Например, за ПИД управление функцията на чувствителността

$$H_n(s, k) = sD(s), \quad H_d(s, k) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s),$$

където  $N(s)$  е числителят на предавателната функция на техническата система  $G(s)$ , а  $D(s)$  е нейният знаменател.

**D–декомпозиция по  $H_\infty$  критерий.** Един от начините за намиране на допустимото множество на  $H_\infty$  управления се основава на пресмятане на границата на множеството

$$\mathcal{K} = \{k : |H_n(j\omega, k)| < \gamma |H_d(j\omega, k)|, \forall \omega \in [0, \infty)\}$$

в явен вид. Множеството на параметрите  $k$ , съответстващи на  $H_\infty$  управленията, представлява сечението на  $\mathcal{K}$  и областта на устойчивост на характеристичния полином [94].

**Теорема.** Границата на множеството  $\mathcal{K}$  се съдържа в решението на системата

$$\begin{cases} H_n(j\omega, k) = 0, \\ H_d(j\omega, k) = 0, \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty), \quad (9.6)$$

$$\begin{cases} |H(j\omega, k)|^2 = \gamma^2, \\ \frac{\partial |H(j\omega, k)|^2}{\partial \omega} = 0, \end{cases} \quad \omega \in [0, \infty), \quad (9.7)$$

и уравненията

$$\begin{aligned} |H(j\infty, k)| &= \gamma, \\ |H(0, k)| &= \gamma. \end{aligned} \quad (9.8)$$

При фиксирано  $k$ , функцията  $|H(j\omega)|$  може да достига максимум на решението на системата (9.6) или на системата (9.7), или пък на решенията на едно от уравненията в (9.8).

### 9.3. D–декомпозиция за матрици

Нека  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times r}$  и  $C \in R^{m \times n}$  са реални матрици, а  $\mathcal{K}$  е някакво свързано множество от реални или комплексни матрици с размер  $r \times m$ . Предполагаме, че матрицата  $A$  няма нулеви и чисто имагинерни собствени стойности.

Въвеждаме матричната предавателна функция

$$M(s) = C(A - sI)^{-1}B \quad (9.9)$$

**Определение.** Разделянето на пространството на параметрите на области

$$D_l = \{K \in \mathcal{K} : A + BKC \text{ има } l \text{ устойчиви собствени стойности}\}, \quad l = 1, \dots, n$$

се нарича **D**-декомпозиция. Уравнението, описващо границите на областта  $D_i$  се нарича уравнение на **D**-декомпозицията. По такъв начин  $D_n$  е набор от стабилизиращи функции  $K$ .

Методът на **D**-декомпозицията се основава на следната теорема [95].

**Теорема.** Уравнение

$$\det(I + M(j\omega)K) = 0, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \quad (9.10)$$

Определя **D**-декомпозиция за класа  $\mathcal{K}$ , т.е. ако  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}$  е свързано множество и е изпълнено ур. (9.10) за  $\forall K \in \mathcal{Q}$ , то  $A + BKC$  има един и същ брой устойчиви собствени стойности за всички матрици  $K$  в  $\mathcal{Q}$ .

Ур. (9.10) определя **D**-декомпозицията в неявен вид. Тук се разглеждат някои случаи, когато уравнението на границата на областите на **D**-декомпозицията се изписват явно. Подчертаваме разликата на този подход от  $\mu$ -анализа, където задачата се състои в намирането на матрица **K**, принадлежаща на границата на областта на устойчивост и притежаваща минимална норма

$$\min_{K \in \mathcal{K}, \det(I + M(j\omega)K) = 0} \|K\|,$$

т.е. търси се радиусът на максималното кълбо, съдържащо се в областта на устойчивост.

Ур. (9.10) представлява обща формулировка на метода на **D**-декомпозицията. В повечето случаи ур. (9.10) са нелинейни по  $K$ , затова техният анализ изисква разширена техника на **D**-декомпозиция.

#### 9.4. **D**-декомпозиция на ЛМН

В този параграф разглеждаме следната задача. Да се намерят области в пространството на параметрите  $x \in R^l$ , вътре в които матрицата

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \quad A_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad (9.11)$$

има фиксиран брой отрицателни собствени стойности. Тук  $\mathbb{S}^{n \times n}$  означава пространството от реалните симетрични  $n \times n$  матрици и на мястото на  $k$  използваме  $x$ . За разлика от разглежданията до тук, ур. (9.11) изисква симетричност на всички матрици, което съществено опростява ситуацията.

Частен случай на тази задача е намирането на точка  $x$ , в която линейната комбинация на симетрични матрици е отрицателно определена, която представлява добре известната задача за допустимост на ЛМН  $A(x) < 0$ . ЛМН теорията не предполага описание на цялото допустимо множество и още повече на други области

на постоянство на знака. Задачите с неопределености в модела също не винаги се поддават на ефективно решаване.

Тук се поставя по-широката цел не само да се опише изцяло допустимото множество  $\{x \in R^l : A(x) < 0\}$ , но и да се характеризират всички области в пространството на параметрите, вътре в които матрицата  $A(x)$  е знакопостоянна. Тази цел се достига с помощта на модифицирана техника на **D**-декомпозиция за случая на симетрични матрици. Тази техника дава възможност сравнително лесно да се решават матрични неравенства при наличието на неопределеност в коефициентите на матриците.

#### 9.4.1. Случай с един параметър

Разглеждаме матрицата

$$A(x) = A + xB, \quad A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Искаме да определим интервалите върху оста на параметъра  $x$ , където матрицата  $A(x)$  има постоянен знак.

$$D_l = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} A(x) \text{ има } l \text{ отрицателни собствени стойности} \\ \text{и } n - l \text{ положителни собствени стойности} \end{array} \right\}.$$

Основните идеи на подхода ще обясним на прост скаларен случай.

Нека при някакво реално  $x^*$  симетричната матрица  $A(x^*) = A + x^*B$  е неизродена и има  $l$  отрицателни и  $n - l$  положителни собствени стойности. Изменението на броя на собствените стойности и еднакъв знак при изменението на  $x$  е възможно само при прехода на един (или няколко) от тях през нулата, т.е. ако  $\det(A + xB) = 0$  при някое  $x \in R$ . Това означава, че може да се намери ненулев вектор  $c$ , за който  $(A + xB)c = 0$ , т.е.  $Ac = -xBc$ . Това означава, че  $x$  представлява обобщена собствена стойност на двойката матрици  $A$  и  $-B$ , а  $c$  – съответния му обобщен собствен вектор. По такъв начин процедурата за намиране на границите на **D**-декомпозицията в скаларния случай се свежда до намирането на всички реални обобщени собствени стойности:  $\text{eig}(A, -B) \in R$ .

Максималният брой области (интервали на оста  $x$ ) е равен на  $n + 1$ , тъй като уравнението  $\det(A + xB) = 0$  има не повече от  $n$  реални решения. От друга страна може да няма изобщо решения. В този случай **D**-декомпозицията се състои от една област и матрицата  $A + xB$  има постоянно количество отрицателни собствени стойности при всички  $x$ .

От особен интерес е описанието на интервала на устойчивост  $D_n$ . Вярна е следната теорема [95]

**Теорема.** Нека  $A, B \in \mathbb{S}^{n \times n}$  и  $B$  е неизродена. Нека  $\lambda_i, c_i, i = 1, \dots, n$  са обобщените собствени стойности и съответните им обобщени собствени вектори на двойката  $(A, -B)$ . Тогава:

1. ако измежду  $\lambda_i$  има комплексни, то  $D_n$  е празно;
2. ако всички  $\lambda_i$  са реални и приемем следните обозначения

$$\underline{x} = \begin{cases} \max_{i \in I_-} \lambda_i, & I_- \doteq \{i: (Be_i, e_i) < 0\} \neq \emptyset; \\ -\infty, & I_- = \emptyset; \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} \min_{i \in I_+} \lambda_i, & I_+ \doteq \{i: (Be_i, e_i) > 0\} \neq \emptyset; \\ +\infty, & I_+ = \emptyset. \end{cases}$$

тогава

$$D_n = \begin{cases} (\underline{x}, \bar{x}) & , \text{ ели } \underline{x} < \bar{x}; \\ \emptyset & , \text{ ели } \underline{x} \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Ако знаем, че  $A < 0$ , то формулите приемат вида

$$\underline{x} = \begin{cases} \max_{\lambda_i < 0} \lambda_i, \\ -\infty, \text{ ако всички } \lambda_i > 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \bar{x} = \begin{cases} \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i, \\ +\infty, \text{ ако всички } \lambda_i < 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

#### 9.4.2. Случай с два и повече параметъра

Нека разгледаме матрица

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad A_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad i = 0, 1, 2.$$

И нека една от матриците  $A_1, A_2$ , например  $A_2$ , е неизродена. Да фиксираме  $x_1$  и да обозначим

$$A = \bar{A}(x_1) \doteq A_0 + x_1 A_1 \quad \text{и} \quad B \doteq A_2.$$

Така задачата се свежда към задачата с един параметър и критичните стойности на параметъра  $x_2$  при зададено  $x_1$  се намират като реалните обобщени собствени стойности

$$x_2(x_1) = \text{eig}(\bar{A}(x_1), -B).$$

Варирайки  $x_1$ , получаваме границите на областите на  $\mathbf{D}$ -декомпозицията. За всяка стойност на  $x_1$  уравнението  $\det(\bar{A}(x_1) + x_2 B) = 0$  има не повече от  $n$  реални корена, затова границата на  $\mathbf{D}$ -декомпозицията се състои от не повече от  $n$  клона.

В общия случай, областта на устойчивост може да се строи отделно.

$$D_n = \{x \in \mathbb{R}^2: A(x) < 0\}$$

Областта е изпъкнала. За всяко  $x_1$  намираме интервал  $(\underline{x}_2(x_1), \bar{x}_2(x_1))$ . При варирането на  $x_1$ , краищата на интервала описват границата на областта на устойчивост. Ще забележим, че ако една от матриците  $A_i, i = 1, \dots, l$  в ЛМН (9.11) е знако определена, то  $D_n$  расте неограничено.

### 9.4.3. ЛМН с неопределеност

Едно важно обобщение на подхода , разгледан в предишния параграф, е възможността на неговото модифициране в ситуации с неопределеност. Тук ще се спрем на ЛМН с неопределеност, ограничена по спектрална норма.

Нека

$$A_i(\Delta_i) = A_i + \Delta_i, \quad A_i, \Delta_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \quad \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, \ell, \quad (9.13)$$

където  $\|\cdot\|$  е спектрална норма, а  $\varepsilon_i \geq 0$  са зададени числа. Разглеждат се само симетрични смущения  $\Delta_i$ , за да се запази структурата на ЛМН. Получаваме следната неопределена линейна функция:

$$A(x, \Delta) = A_0(\Delta_0) + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i(\Delta_i),$$

$$\Delta \in \mathcal{D} \doteq \{(\Delta_0, \dots, \Delta_\ell) : \Delta_i \in \mathbb{S}^{n \times n}, \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i\}. \quad (9.14)$$

Областите  $D_l$  на робастната  $\mathbf{D}$ -декомпозиция тук се образуват по следния начин

$$D_l^{rob} = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell : \begin{array}{l} A(x, \Delta) \text{ има точно } l \text{ отрицателни} \\ \text{собствени стойности } \forall \Delta \in \mathcal{D} \end{array} \right\}; \quad (9.15)$$

в частност, робастно допустимата област е

$$D_n^{rob} = \left\{ x \in \mathbb{R}^\ell : A(x, \Delta) < 0 \quad \forall \Delta \in \mathcal{D} \right\}.$$

Задачата се състои в описанието на границите на областите на робастната  $\mathbf{D}$ -декомпозиция. Тези граници тук се определят като тези стойности на параметрите  $x$ , при които матрицата  $A(x, \Delta)$  се оказва изродена при някое  $\Delta \in \mathcal{D}$ . Границата на робастната  $\mathbf{D}$ -декомпозиция се размиват в „ивици”, вътре в които  $A(x, \Delta)$  може да има различен брой отрицателни собствени стойности в зависимост от една или друга допустима стойност на  $\Delta$ .

Както и при анализа на задачата без определеност, отначало разглеждаме еднопараметрични семейства като започваме с най-простия случай, когато неопределеността в матрицата  $A$  е адитивна:

$$A(x, \Delta) = (A + \Delta) + xB; \quad \Delta \in \mathcal{D} \doteq \{\Delta \in \mathbb{S}^{n \times n} : \|\Delta\| \leq \varepsilon\}. \quad (9.16)$$

Границите на областите (интервали) на робастната  $\mathbf{D}$ -декомпозиция се определят от условието за изроденост на матрицата  $A + xB + \Delta$  при някое  $\Delta \in \mathcal{D}$ , т.е. задачата се състои в определянето на радиуса на неизроденост на матрицата  $A + xB$ . Основен инструмент тук е следната теорема [95].

**Теорема.** За неизродената матрица  $M \in \mathbb{S}^{n \times n}$  симетричният радиус на неизроденост

$$\rho(M) \doteq \inf\{\|P\| : P \in \mathbb{S}^{n \times n}, M + P \text{ изродена}\},$$

е равен на

$$\rho(M) = 1/\|M^{-1}\| = \min_i |\lambda_i(M)|.$$

При това критичната стойност  $P$  е равна на  $P = -\lambda c c^T$ , където  $\lambda$  е минималната по абсолютна стойност собствена стойност  $M$ , а  $c$  е съответния й нормиран собствен вектор.

В съответствие с тази теорема матрицата  $(A + xB) + \Delta$  със смущения  $\|\Delta\| \leq \varepsilon$  остава робастно неизродена при стойности на  $x$ , удовлетворяващи

$$\|(A + xB)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}, \tag{9.17}$$

затова, ако съставим функцията  $\varphi(x) = \|(A + xB)^{-1}\|$ , можем да намерим числено интервалите на робастна неизроденост  $\{x : \varphi(x) < 1/\varepsilon\}$ .

По аналогичен начин се анализира и по-сложната задача, когато неопределеност присъства и в двете матрици

$$A(x, \Delta) = (A + \Delta_A) + x(B + \Delta_B); \quad \|\Delta_A\| \leq \varepsilon_A; \quad \|\Delta_B\| \leq \varepsilon_B. \tag{9.18}$$

Да представим

$$A(x, \Delta) = (A + xB) + (\Delta_A + x\Delta_B).$$

За смущенията  $\Delta_A + x\Delta_B$  на матрицата  $A + xB$  имаме оценката  $\|\Delta_A + x\Delta_B\| \leq \varepsilon_A + |x|\varepsilon_B$ , при това тя е точна (равенството се достига), защото  $\Delta_A$  и  $\Delta_B$  избират независимо. Да въведем функцията  $\varphi(x) = \|(A + xB)^{-1}\|$ . В съответствие с изказаната по-горе теорема, интервалите на робастна неизроденост, т.е. областите  $D_i^{rob}$ , се определят с условието

$$\varphi(x) < \frac{1}{\varepsilon_A + |x|\varepsilon_B}.$$

Нека сега разгледаме дупараметрично семейство

$$A(x, \Delta) = (A_0 + \Delta_0) + x_1(A_1 + \Delta_1) + x_2(A_2 + \Delta_2); \quad \|\Delta_i\| \leq \varepsilon_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Да фиксираме  $x_1$  и да обозначим  $A = A_0 + x_1A_1$ ,  $B = A_2$ ,  $\varepsilon_A = \varepsilon_0 + |x_1|\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_B = \varepsilon_2$ . Така случаят на два параметъра се довежда до случаят с един параметър ур.(III.9.18). За определяне на границите съставяме функцията

$$\varphi(x_2) = \|(A + x_2B)^{-1}\| \quad \text{и} \quad \varepsilon(x_2) = \frac{1}{\varepsilon_A + |x_2|\varepsilon_B}$$

и проверяваме условието

$$\varphi(x_2) < \varepsilon(x_2), \tag{9.19}$$

Кое определя интервалите на робастност по  $x_2$  при фиксираната стойност на  $x_1$ . Кат се варира  $x_1$  тези интервали запълват двумерни области на робастна D –декомпозиция. Стойностите на  $x_2$ , при които горното неравенство (9.19) се нарушава, отговарят на

отсъствие на робастност. При варирането на  $x_1$  тези интервали на нарушаване описват двумерни области – границите на робастна **D**-декомпозиция.

Могат да се разгледат и по-общии видове неопределени матрици. Техният анализ се основава на резултата на Петерсен [96]

**Теорема.** Нека  $G = G^T$ ,  $M \neq 0$ ,  $N \neq 0$  са матрици с размерности  $n \times n$ ,  $n \times r$ ,  $m \times n$  съответно. Тогава неравенството

$$G + M\Delta N + N^T \Delta^T M^T < 0$$

е вярно за всички матрици  $\Delta$  с размерност  $r \times m$  и  $\|\Delta\| < 1$  тогава и само тогава, когато съществува  $\varepsilon > 0$ , за което

$$G + \varepsilon M M^T + \frac{1}{\varepsilon} N^T N < 0.$$

#### 9.4.4. Рандомизирани алгоритми за синтез с **D**-декомпозиция

Методите за **D**-декомпозиция в класическия им вид могат да се прилагат само в едномерния и двумерния случаи. Известни са само няколко примера с по-голям брой параметри, когато успешно са описани областите на устойчивост в явен вид. Но общото уравнение на **D**-декомпозиция (9.10) е вярно и в многомерния случай. Затова възниква въпросът как да се представи достатъчно пълно областта на устойчивост (или нейната граница) за общия случай [97].

Един от възможните начини за решаването на тази задача е да се генерират по случаен начин точки вътре или на границата на желаната област. Това може да се направи със съвременните варианти на метода на Монте Карло. Един от методите (Hit-and-Run) [98] служи за приближено равномерно генериране на точки вътре в областта, която като цяло не се предполага нито изпъкнала нито свързана. Вторият метод (Shake-and-Bake) [99–100] позволява да се генерират точки на границата на областта, която може да е неизпъкнала, но трябва да е свързана.

Във всички тези методи се използва **граничен оракул**. По аналогия с оракула за принадлежност (membership oracle) и оракула за отделимост (separation oracle), които се използват в съвременната теория на изпъкналата оптимизация [101], за произволни  $x, y \in \mathbb{R}^n$  граничният оракул намира точките на пресичане на лъча  $x + \lambda y$  с границата на неявно зададено множество  $\mathcal{K}$  или посочва липсата на пресичане. Нека множеството  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  е отворено ограничено, но, изобщо, неизпъкнато и несвързано (но с краен брой свързани компоненти). Освен това предполагаме, че пресичането на множеството  $\mathcal{K}$  с права дава краен брой интервали. За дадени точка  $k \in \mathcal{K}$  и направление  $d \in \mathbb{R}^n$  граничният оракул задава пресичането на правата  $k + \lambda d$ ,  $-\infty < \lambda < +\infty$ , с множеството  $\mathcal{K}$ , т.е. множеството:

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} : k + \lambda d \in \mathcal{K}\}.$$

което се състои от краен брой интервали. Нека предположим, че граничният оракул е зададен (т.е. за произволни  $k, d$  може да се построи множеството  $S$ ). Тогава методът Hit-and-Run може да се зададе със следните стъпки

*Стъпка 1:* Намира се начална точка  $k^0 \in \mathcal{K}$

*Стъпка 2:* В точката  $k^i \in \mathcal{K}$  се генерира случайно направление  $d^i \in R^n$ , равномерно разпределено на единичната сфера (т.е.  $d^i = \xi / \|\xi\|$ ,  $\xi = \text{rand}(n,1)$  е  $n$ -мерен вектор, чиито компоненти са разпределени по стандартен нормален закон).

*Стъпка 3:* Прилага се граничен оракул, т.е. построява се множеството

$$S_i = \{\lambda \in \mathbb{R} : k^i + \lambda d^i \in \mathcal{K}\}.$$

*Стъпка 4:* Генерира се случайна точка  $\lambda_i$ , равномерно разпределена на  $S_i$  ( $S_i$  има краен брой ограничени интервали) и се построява точката

$$k^{i+1} = k^i + \lambda_i d^i.$$

*Стъпка 5:* Преминаваме към *Стъпка 2* със следващото по ред  $i$ .

Методът Hit-and-Run е сходящ.

Методът Hit-and-Run е приложим при решаването на ЛМН  $A(x) < 0$  (ур. (9.11)). Тук задачата се опростява, защото множеството  $\mathcal{K}$  в този случай задава интервал  $(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ , който се пресмята по следния начин. Нека разгледаме точка  $x \in R^l$  и направление  $y \in R^l$ . При  $\lambda \in R$  имаме:

$$A(x + \lambda y) = A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i + \lambda \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

Обозначавайки

$$A \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i A_i, \quad B \doteq \sum_{i=1}^{\ell} y_i A_i,$$

свеждаме задачата до случая с един параметър  $A(\lambda) = A + \lambda B$ . Затова определянето на точките от границата за избрано направление  $y$  се свежда до намирането на реалните обобщени собствени стойности  $\lambda_i$  на двойката  $(A, -B)$ . Генерирайки равномерно на единичната  $l$ -мерна сфера вектори на направление във вида  $y = \eta / \|\eta\|$ , където  $\eta$  и със стандартно  $l$ -мерно гаусово разпределение, получаваме точки  $x + \lambda y$  от границата на  $\mathbf{D}$ -декомпозиция, т.е. граничният оракул.

Такъв граничен оракул е особено ефективен при характеризирането на областта на устойчивост  $D_n$ , която за ЛМН винаги и изпъкнала. Нека при някое  $x \in D_n$  матрицата  $A(x)$  (ур. (9.11)) е отрицателно определена,  $x \in D_n$  и  $y$  е някакво направление. Тогава критичните стойности  $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$ , при които се запазва знакоопределеността на матрицата  $A(x + \lambda y)$  се намира от ур. (9.12).

По аналогичен начин методът Hit-and-Run може да се приложи за робастни ЛМН. Нека построим граничния оракул за областта на робастна устойчивост  $D_n^{rob}$  (ур. (9.15)) за семейството (9.13)–(9.14) при  $l > 2$ . Ще търсим точки на пресичане на едномерен лъч с границата на робастната  $D$  –декомпозиция. Нека  $x \in D_n^{rob}$  е робастно допустима точка и нека  $y \in R^l$  е някакво направление. Разглеждаме правата  $x + \lambda y$  и търсим  $\underline{\lambda}^{rob}, \bar{\lambda}^{rob}$  минималната и максималната стойност на  $\lambda$ , при които отрицателната определеност на матрицата  $A(x + \lambda y, \Delta)$  е гарантирана при всички  $\Delta \in \mathcal{D}$ . Имаме

$$A(x + \lambda y, \Delta) = \hat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda),$$

където

$$\hat{A}(\lambda) \doteq A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) A_i, \quad \Delta(\lambda) \doteq \Delta_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) \Delta_i,$$

И матрицата  $\hat{A}(\lambda) + \Delta(\lambda)$  остава неизродена (т.е. отрицателно определена) при всички  $\Delta \in \mathcal{D}$ , удовлетворяващи неравенството

$$\|(\hat{A}(\lambda))^{-1}\| < \frac{1}{\|\Delta(\lambda)\|}.$$

Тъй като смущенията  $\Delta_i$  са независими, оценката

$$\|\Delta(\lambda)\| \leq \|\Delta_0\| + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \|\Delta_i\| = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \varepsilon_i$$

е точна. Затова, като съставим двете скаларни функции

$$\varphi(\lambda) \doteq \left\| \left( A_0 + \sum_{i=1}^{\ell} (x_i + \lambda y_i) A_i \right)^{-1} \right\|, \quad \varepsilon(\lambda) \doteq \frac{1}{\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i + \lambda y_i| \varepsilon_i}, \quad (9.20)$$

ще определим интервала  $[\underline{\lambda}^{rob}, \bar{\lambda}^{rob}]$  на отрицателна определеност на семействата  $A(x + \lambda y, \Delta)$  числено като  $\{\lambda : \varphi(\lambda) \leq \varepsilon(\lambda)\}$ .

**Теорема.** [95] Нека  $A(x, 0) < 0$ . Тогава за произволно  $y \in R^l$  максималната и минималната стойност на  $\lambda$ , запазващи отрицателната определеност на матрицата  $A(x + \lambda y, \Delta)$  при всички допустими смущения  $\Delta$ , се задават с двете решения на ур. (9.20)  $\varphi(\lambda) = \varepsilon(\lambda)$  на интервала  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ , където  $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$  са границите на отрицателна определеност на матрицата  $A(x + \lambda y, 0)$  (ур.(9.12)).

Аналогично, за да се направи проверката  $x \in D_n^{rob}$  за някое  $x \in R^l$ , достатъчно е да се разгледа несмутената матрица в точка  $x$

$$x : A(x, 0) = A_0 + \sum_{i=1}^l x_i A_i$$

и да се провери неравенството

$$\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{\ell} |x_i| \varepsilon_i < 1 / \|(A(x, 0))^{-1}\|.$$

Другият рандомизиран метод Shake-and-Bake, който беше упоменат по-горе, поставя точки не във вътрешността, а на границата на множеството  $\mathcal{K}$ . Предполага се, че граничният оракул в този метод дава малко по-различна информация отколкото в метода Hit-and-Run. Именно, за гранична точка  $k \in \partial\mathcal{K}$  той изчислява вътрешната нормала  $N - N(k)$  към  $\partial\mathcal{K}$  и в тази точка за направлението  $d \in \mathbb{R}^n$ ,  $(d, N) > 0$  (т.е. към вътрешността на  $\mathcal{K}$ ) намира

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(k, d) = \sup\{\lambda > 0 : k + \lambda d \in \mathcal{K}, \forall t \in (0, \lambda)\}.$$

С други думи,  $\bar{\lambda}$  е точката на първото пресичане на лъча  $k + \lambda d$ ,  $\lambda > 0$  с границата  $\mathcal{K}$ .

Алгоритъм Shake-and-Bake може да се опише със следните стъпки:

*Стъпка 1:* Задава се точка  $k^0 \in \partial\mathcal{K}$ .

*Стъпка 2:* В точка  $k^i \in \partial\mathcal{K}$  намираме единична вътрешна нормала  $N^i$  към  $\partial\mathcal{K}$  и генерираме случайно направление  $d^i$  по следния начин:  $d^i = \alpha_i N^i + c^i$ , където  $c^i$  е равномерно разпределено по  $\|c^i\|=1$  при  $(c^i, N^i) = 0$ . Тук  $\alpha_i > 0$  е едномерна случайна величина  $\alpha = \left(1 - \xi^{\frac{2}{n-1}}\right)^{1/2}$ , където  $\xi = \text{rand}$  е случайно число с равномерно разпределение на интервала  $[0,1]$ .

*Стъпка 3:* Намира се  $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}(k^i, d^i)$  с помощта на граничния оракул и се построява

$$k^{i+1} = k^i + \bar{\lambda}_i d^i.$$

*Стъпка 4:* Премаваме към *Стъпка 2* с увеличено.

Резултатът за поведението на този метод в общия случай се дава с теоремата [166]

**Теорема.** Нека  $\mathcal{K}$  е свързано отворено ограничено множество имащо нормала почти във всички точки на границата. Тогава разпределението на точките  $k^i$  се стреми към равномерно разпределение по  $\partial\mathcal{K}$  при  $i \rightarrow \infty$ . Множеството  $\mathcal{K}$  не се предполага изпъкнало.

В случаите, когато  $\mathcal{K}$  е област на устойчивост, техниката Shake-and-Bake позволява да се работи в матричния случай (§ 9.3). Нека

$$\tilde{\mathcal{K}} = \{K \in \mathbb{R}^{r \times m} : A + BKC \text{ устойчива}\},$$

и  $\mathcal{K}$  е свързана компонента на  $\tilde{\mathcal{K}}$ , съдържаща дадено  $K^0$  (напр.,  $K^0 = 0$  при устойчива  $A$ ). Тогава граничният оракул, фигуриращ в алгоритъма Shake-and-Bake, може да бъде реализиран числено като се използва ур.(9.10) за матрична **D**-декомпозиция. Като резултат получаваме матрици  $K$ , приблизително равномерно разположени на границата на  $\mathcal{K}$ . Методът може да бъде приложен и към ЛМН. Необходимият граничен оракул се изписва в явен вид.

Описаните два рандомизирани метода позволяват запълването на областта на устойчивост (или границата ѝ) с точки на извадки, което заменя графическите методи в многомерния случай.

## Литература

1. Sunar M., S.S. Rao, Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology, *Appl Mech Rev*, 1999, vol. 52, no. 1, pp. 1 – 16.
2. B.K. Wada, J.I Fanson, E.F. Crawley, Adaptive structures, ASME Winter Annual Meeting, San Francisco CA, ASME, AD 15, 1989.
3. S.S. Rao, M. Sunar, Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures. A survey, *Appl. Mech. Rev.*, 1994, vol. 47, no. 2, pp. 113 – 123.
4. NageshBabu G.L., Hanagud S., Robustness and vibration control of adaptive structures by use of piezoelectric sensors and actuators, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures. Structural Dyn and Mat Conf, Baltimore MD, 1991, pp 2269-2279.
5. Crawley E.F., Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment, *J Aircraft*, 1994, vol. 32, no. 8, pp. 1689-1699.
6. Denoyer K.K., Kwak M.K., Dynamic modelling and vibration suppression of a slewing structure utilizing piezoelectric sensors and actuators, *J Sound Vib.*, 1996, vol. 189, no. 1, pp. 13-31.
7. Niezrecki C., Cudney H.H., Structural control using analog phase-locked loops, *J Vib. Acoust*, 1997, vol. 119, no. 1, pp. 104-109.
8. Preumont A., Achkire Y., Active dumping of structures with guy cables, *J Guidance, Control, Dyn*, 1997, vol. 20, no. 2, pp. 320-326.
9. Galeazzi C., Morganti F., Analysis and control of micro-vibrations of ARTEMIS satellite, *J Intelligent Mat Syst Struct*, 1996, vol. 7, no. 2, pp 216-226.
10. Changuio N., Youdan K., Optimal design for composite lifting surface flutter suppression with piezoelectric actuators, *ALAA J*, 1995, vol. 33, no 10, pp. 1897-1904.
11. Banks H.T., Demetrou N., Smith R.C.,  $H_{\infty}$ /minmax periodic control in a two dimensional structural acoustic model with piezoceramic actuators, *IEEE Trans Autom Control*, 1996, vol. 41, no/ 7, pp. 843-959.
12. Vucocich G., Yousefy-Koma A., Non-located active traveling wave control of smart structures using distributed transducers, *Proc IEEE Conf on Control Applications*, 1996, pp. 297-302.
13. Kwak M.K., Sculli D., Fuzzy-logic based vibration suppression control experiments on active structures, *J Sound Vib*, 1996, vol. 191, no. 1, pp. 15-28.
14. Anderson E.H., Hagood N.W., Simultaneous piezoelectric sensing/actuation : analysis and application to controlled structures, *J Sound Vib*, 1995, vol. 174, no. 5, pp. 617-639.

15. Yellin J.M., Shen I.Y., Self-sensing active constrained layer damping treatment for a euler-bernoulli beam, *J Smart Mat Struct*, 1996, vol. 5, no. 5, pp. 528-637.
16. Yang S.M., Jeng C.A., Structural vibration suppression by concurrent piezoelectric sensor and actuator, *J. Intelligent Mat. Syst*, 1996, vol. 5, no. 6, pp. 806-813.
17. Near C.D., Piezoelectric actuator technology, *SPIE Conf on Smart Struct and Mat*, Newnham RE, 1996, SPIE 2717, pp. 246-269.
18. Yang J.S., Batra R.C., Liang X.Q., Vibration of simply supported elastic plate due to piezoelectric actuators, *SPIE Conf on Smart Struct and Mat*, 1995, Proc SPIE 2442, pp. 168-181.
19. Dimitriadis E.K., Fuller C.R., Rogers C.A., Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates, *J Vib Acoustic*, 1991, vol. 113, no. 1, pp. 100-107.
20. D'Cruz J., Active control of panel vibration with piezoelectric actuator, *J Intelligent Mat Syst Struct*, 1993, vol. 4, no. 3, pp. 398-402.
21. Reddy J.N., *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*, CRC Press, 1997.
22. Yang J.S., Equations for flexural motion of elastic plates with partially electroded piezoelectric actuators, *J Smart Mat Struct*, 1997, vol. 6, pp. 485-490.
23. Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Finite element optimization methods for the active control of radiated sound from a plate structure, *J Smart Mat Struct*, 1995, vol. 4, no. 4, pp. 318-326.
24. Polla D.L., Ferroelectric microsensors and microactuators, *Proc IEEE Int Symp on Application of ferroelectrics*, pp. 127-133.
25. Moric M.A., Saigal s., Shape sensitivity analysis of piezoelectric structures by the adjointed variable method, *AIAA J*, 1991, vol. 29, no. 8, pp. 1313-1318.
26. Berry A, Carette F., Guigou C., Volume velocity sensors for plates, *Proc ASME Int Mech Eng Congress*, San Francisco CA, 1995, 95WA-/NCA-7.
27. Burke S.E., Sullivan J.M., Limitations of Piezoelectric Sensors for Structural Control, *SPIE Conf of Smart Structures and Integrated Systems*, 1995, SPIE 2443, pp. 590-596.
28. Yang S.M., Lee Y.J., Interaction of structure vibration and piezoelectric actuation, *J Smart Mat Struct*, 1994, vol 3, no 4, pp 494-500.
29. Tiersten H.F., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York, 1969.
30. Tzou H.S., Ye R., Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric shells, *AIAA J*, 1996, vol 34, no. 1, pp. 110-115.
31. Housner G.W., Bergman L.A., Caughey T.K., Chassiakos A.G., Claus R.O., *Structural Control: Past, Present, and Future*, *J Eng Mechanics*, 1997, vol. 123, no. 9, pp. 897-971.
32. Khargonekar P., Rotea M., Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach, *Trans on Automatic Control*, 1991, vol. 36, no. 7, pp. 824-837.
33. Norris G., Skelton R., Selection of dynamic sensors and actuators in the control of linear systems, *J. Dyn Sys Meas*, 1989, no.111, pp. 389-397.

34. Dyke S.J., Spenser J.B.F., Sain M.K., Carlson J.D., Experimental validation of semi-active structural control strategies using acceleration feedback, Proc Int Conf on Motion and Vibration Control, 1996, vol. III, pp. 291-296.
35. Agrawal A.K., Kosaka H, On optimality and robustness in linear quadratic optimal control of civil engineering structures, Proc. First World Conf. on Struct. Control, 1994, vol 3, FP1, pp. 43-52.
36. Zhu G.G., Skelton R.E., Output Covariance Constrain Problem with disturbance feedback, Proc. First World Conf. on Struct. Control, 1994, pp. FP4-32-41.
37. Marinova D., Response Control of Tall Buildings Subjected to Seismic and Wind Loads, Proc. STAB2008 – X-th Int. Pyatnitskiy’s Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems”, June 2008, Moscow.
38. Anderson, G.D.O. Moore B, Optimal control, linear quadratic method, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N J, 1990.
39. Tomasula D.P., Spenser J.B.F., Sain M.K., Nonlinear Structural Control for Limiting Extreme Dynamic Responses, J. Eng. Mech ASCE, 1996, vol. 122, no. 3, pp. 218-229.
40. Grigoriadis K., Zhu H., Skelton R., Optimal Redesign of Linear Systems, J. Dyn, Sys., Measurement and Control, 1996, no. 118, pp. 598-605.
41. Zhou K., Doyle J., Glover K., Robust and Optimal Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
42. Marinova D., Model Development and Control Design of Smart Functionally Graded Structures, Proc. CIMTEC2008 – 3<sup>rd</sup> Int. Conf. Smart Materials Structures Systems, June 2008, Acireale, Sicily, Italy.
43. Suhardjo J., Spenser J.B.F., Kareem A., Frequency Domain Optimal Control of Wind Exited Buildings, J. Eng. Mech. ASCE, 1992, vol. 118, no. 12, pp. 2463-2481.
44. Dowdell D.J, Cherry S., Structural Control Using Semi-active Friction Damper, Proc. World Conf. on Struct. Control, 1994, FA1, pp. 59-68.
45. Laiande F., Rogers C.A., Review of the Mechanics of the Induced Strain Actuation of Intelligent Structures, 1994.
46. Giurgiutiu V. Chaudhry Z., Rogers C.A., Effective Use of Induced-Strain Actuators in Aeroelastic Vibration Control, Proc. Adaptive Struct. Forum, 35<sup>th</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn, and Mat Conf., Paper No AIAA-95-1095.
47. Preumont A., Vibration Control of Active Structures, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
48. Furuya H., Haftka R.T., Placing Actuators on Space Structures by Genetic Algorithms and Effectiveness Indices, Structural Optimization, 1995, vol. 9, no. 2, pp. 69-75.
49. Saleh A., Adeli H., Optimal Control of Adaptive/Smart Multistory Building Structures, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 1998, vol. 13, pp. 389-403.
50. Makola M., Abdullah, Optimal Placement of Output Feedback Controllers on Slender Civil Structures at Discrete Locations, Engineering Structures, 2000, vol. 22, pp. 1042-1047.

51. Saleh A., Adeli H. Optimal Control of Adaptive/Smart Multistory Building Structures, Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 1998. V. 13.
52. Makola M., Abdullah. Optimal Placement of Output Feedback Controllers on Slender Civil Structures at Discrete Locations// Engineering Structures. 2000. V. 22.
53. Baniotopoulos, C. C., Plalis, T. A., Wind action on civil engineering structures according to Eurocode 1-2.4 and applications on slender structures, KTIRIO-Scientific Publication A, 2002.
54. Arvanitis K.G., Zaharenakis E.G., Stavroulakis G.E., New Trends in Optimal Structural Control, *In: Selected Topics in Structronic and Mechatronic Systems*, Ed. A. Belyaev and A. Guran, , 2003, Singapore, World Academic Publishers.
55. Schmitendorf W.E., Jabbari F., Yang J.N., Robust Control Techniques for Buildings under Earthquake Excitation, *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1994, v. 23.
56. Shahian B., Hassul M., Control System Design Using MATLAB, 1994, Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ.
57. Yang J.N., Akbarpour A., Ghaemmaghami P., Instantaneous Optimal Control Laws for Tall Buildings under Seismic Excitations, Technical Report, NCEER-87-0007, 1987, National Center for Earthquake Engineering, SUNY-Buffalo.
58. Cheng F.Y., Suthiwong S., Tian P., Generalized Active Control with Embedded and Half-Space Soil Structure Interaction, Proc., ASCE 11<sup>th</sup> Analysis and Computation Conference, Atlanta, 1994, pp. 337-346.
59. Cheng F.Y., Pantelides C.P., Algorithm Development for Using Optimal Control in Structural Optimization Subjected to Seismic and Wind Forces, NSF Report, U.S. Department of Commerce, National Technical Information Service, NTIS No. PB90-1333471/AS, 1998.
60. Cheng F.Y., Generalized Optimal Active Control Algorithm for Seismic-Resistant Structures with Active and Hybrid Control, *Int. J. of Computer Applications in Technology*, 2000, Vol. 13, Special Issue, pp. 42-51.
61. Ambartsumyan S.A., Theory of Anisotropic Plates, Technomic, Standford, CT, 1969.
62. Mitsuta S, Okawa E, Seto K, Ito H., Active vibration control of structures arranged in parallel, *Journal of JSME, Series C*, 1994, vol. 37, no. 3, pp. 436–343.
63. Chen C.C., Chen G.D., Nonlinear control of a 20-story steel building with active piezoelectric friction dampers, *J Structural Engineering and Mechanics*, 2002, vol. 14, no. 1,;pp. 21–38.
64. Marinova D., Sandwich Layer Beams and Their Control with Friction Dampers, Proc. XI-th Int. Pyatnitskiy's Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems", June 2010, Moscow.
65. Doyle J.C, Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A., State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1989, vol. 34, no. 8, pp. 831-847.

66. Marinova D., Computational Methods for Modeling and Active Regulating of Composite Plates with Possible Damages, Proc. ICCST/6, January 2007, Durban, South Africa.
67. Marinova D., Chenkov N., Shape Control and Damage Identification of Laminated Piezoelectric Plates Using Genetic Optimization, 8<sup>th</sup> Balkan Conf. on Operational Research, Sept. 2007, Belgrade.
68. Curtain R.F., Zwart H.J., An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.
69. Chilali M., Gahinet P.,  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constrains: an LMI Approach, IEEE Trans. Autom. Control, 1996, pp. 358-367.
70. Nesterov Y.E., Nemirovski A. Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.
71. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A., Chinli M, LMI Control Toolbox, The Mathwork Inc., 1995.
72. Apkarian P., Gahinet P., A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $H_\infty$  -Controllers, IEEE Trans. Automat. Control, 1995, vol. 40, no. 5. pp. 853-864.
73. Yamada Y., Hara S., Global Optimization for  $H_\infty$  -Controllers with Constant Diagonal Scaling, IEEE Trans. Automat. Control, 1998, vol. 43, no. 2. pp. 191-203.
74. Apkarian P., Tuan H.D., Robust Control via Concave Minimization Local and Global Algorithms, IEEE Trans. Automat. Control, 2000, vol. 45, no. 2. pp. 299-305.
75. Iwasaki T., Skelton R.E. All Controllers for the General  $H_\infty$  Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas, Automatica. 1994. vol. 30. no. 8. pp. 1307-1317.
76. Gahinet P., Apkarian P., A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control, Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 1994, vol. 4. pp. 421-448.
77. Д.В. Баландин, М.М. Коган, Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств, Москва, Наука, 2006.
78. Петков П., Константинов М., Робастни Системи за Управление: Анализ и Синтез с *MATLAB*. ABC Техника, София, 2002.
79. Packard A., Doyle J.C., The Complex Structured Singular Value, Automatica, 1993, vol. 29, pp. 71-109.
80. Franklin J.N., Matrix Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
81. Halevi Y., Control of flexible Structures Governed by the Wave Equation Using Infinite Transfer Functions, ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2005, vol. 127, pp. 570-588.
82. Silverberg L., Uniform Damping Control of Spacecraft, J. Guidance, Control and Dynamics, 1986, vol. 9. pp. 221-227.
83. Alli H., Singh T. On the Feedback Control of the Wave Equation, J. of Sound and Vibration, 2000, vol. 234, no. 4, pp. 569-576.
84. Belytschko T., Hughes T.J.R., (Eds), Computational Methods for Transient Analysis, 1, North-Holland, Amsterdam, the Netherlands, 1983.

85. Barlow J., More on Optimal Stress Points – Reduced Integration Element Distortions and Error Estimation, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1989, no. 28, pp. 1496-1504.
86. Неймарк Ю.И., Робастная устойчивость и D –разбиение, *АиТ*, 1992, № 7, с. 10-18.
87. Qiu I., Bernharsson B., Dantzer A., Davison E.J., Young P.M., Doyle J.C., A Formula for Computation of the Real Stability Radius, *Automatica*, 1995, vol. 31, no. 6, pp. 879-890.
88. Петров Н.П., Поляк Б.Т., Рабастное D–разбиение, *АиТ*, 1991, № 11, с. 41-53.
89. Blanchini F., Lepschy A., Miani S., Viaro U., Characterization of PID and Lead/Lag Compensators Satisfying Given  $H_\infty$  Specifications, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2004, vol. 48, no. 5, pp. 736-740.
90. KEEL I., Bhattacharyya S.P., Fobut, Fragile or Optimal?, *IEEE Trans. Automat. Control*, 1997, vol. 42, no. 6, pp. 1098-1105.
91. U. Mackenroth, *Robust Control Systems. Theory and Case Studies*, Springer, 2004.
92. Francis B.A., *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, Berlin, Springer, 1987.
93. Goldberg J.L., Schwartz A.J., *Systems of Ordinary Differential Equations, An Introduction*, Harper and Row, New York, 1972.
94. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А., Синтез регуляторов низкого порядка по критерию  $H_\infty$ : параметрический подход, *АиТ*, 2007, № 3, с. 93-105.
95. Gryazina E.N., Polyak B.T., Stability Regions in the Parameter Space: D – decomposition revisited, *Automatica*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 13-26.
95. Поляк Б.Т., Щербаков П.С., Техника D–разбиения при решения линейных матричных неравенств, *АиТ.*, 2006, № 11, с. 159-174.
96. Petersen I. A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems, *Syst. and Control Lett.* 1987, vol. 8, pp. 351\_357.
97. Е. Грязина, Б.Т. Поляк, А.А. Тремба, Современное состояние метода D-разбиения, *АиТ*, 2008, 35 стр.
98. Smith, R.L. Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // *Oper. Res.* 1984. V. 32. No. 6. P. 1296\_1308.
99. Comets F., Popov S., Schütz G.M., Vachkovskaia M. Billiards in a General Domain with Random Reflections. URL: [arXiv:math/0612799v3](https://arxiv.org/abs/math/0612799v3) [math.PR].
100. Боровков К.А., Об Одном Новом Варианте Метода Монте-Карло, Теория вероятностей и ее применения, 1991, т. 36, № 2, с. 342-346.
101. Ben-Tal A., Nemirovski A. *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms and Engineering Applications*. Philadelphia: SIAM, 2001.
102. Marinova D., Stavroulakis G., Lukarski D., Active Optimal Control Design of Damage Induced Plates in Bending, *ESMC 2006 6<sup>th</sup> European Solid Mechanics Conference*, 28 August – 1 September, 2006, Budapest, Hungary.
103. Mallik N., Ray M.C., Effective Coefficients of Piezoelectric Fiber Reinforced Composites, *AIAA J.*, 2003, no. 41, pp. 704–710.

- 104.** Newmark N.M., A Method of Computation for Structural Dynamics, J. Eng. Mech. Division, ASCE, 1959, pp. 67-94.
- 105.** D. Marinova, D. Lukarski, G. Stavroulakis, Modeling and Optimal Control for Plates with Defects, Proc. MME06, Ankara, Turkey, 2006.
- 106.** E.P. Hadjigeorgiou, G.E. Stavroulakis, C.V. Massalas, Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization, Int. J. Engineering Science, 2006, vol. 44, no. 7, pp. 409-421.
- 107.** Spenser B.F., Sain M.K., Controlling Buildings: a New Frontier in Feed-back, IEEE Control Systems, 1997, vol. 17, no.6, pp. 19-35.
- 108.** Nishimura H., Kojima A., Seismic Isolation Control for a Building like Structure, IEEE Control Systems, 1999, vol. 19, no. 6. pp. 38-44.
- 109.** Баландин Д.В., Коган М.М., Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях, Изв. АН Теория и Системы Управления, 2004, № 5, сс. 60-66.
- 110.** Chen G.D., Garrett G.T., Chen C.C., Cheng F.Y., Piezoelectric friction dampers for earthquake mitigation of buildings: Design, fabrication, and characterization. *Structural Engineering and Mechanics*, 2004; vol. 17, no. 3–4, pp. 539–56.