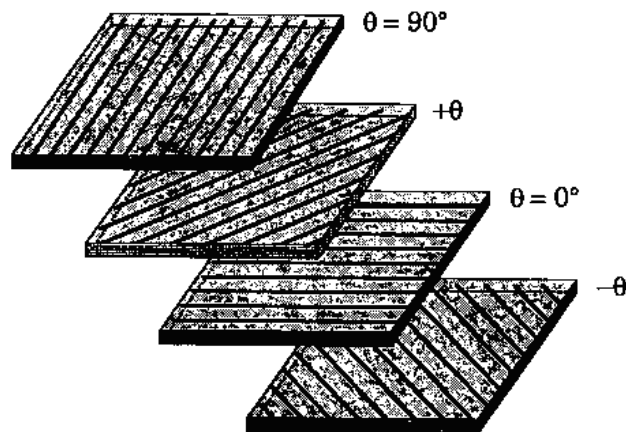


Даниела Ганчева Маринова

**МАТЕМАТИЧЕСКО
МОДЕЛИРАНЕ НА
ИНТЕЛИГЕНТНИ СТРУКТУРИ**



Евдемония продъкшън ЕООД

2014

**МАТЕМАТИЧЕСКО
МОДЕЛИРАНЕ НА
ИНТЕЛИГЕНТНИ СТРУКТУРИ**

Даниела Ганчева Маринова

Евдемония продъкшън ЕООД

2014

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ НА ИНТЕЛИГЕНТНИ СТРУКТУРИ

Учебник

Първо издание

София, 2014

Автор: Даниела Ганчева Маринова

Рецензент: доц. д-р Владимир Тодоров

Издател: Евдемония продъкшън ЕООД

Лице за контакт: Ангел Марчев, мл.

e-mail: angel.marchev@basaga.org

телефон: +359888444062

Авторът носи пълна отговорност за авторството си и за оригиналността на произведението, както и за грешки, допуснати по негова вина. Авторът запазват всички права по издаване на текста.

Печатно издание: ISBN 978-954-92924-8-0

Електронно издание: ISBN 978-954-92924-9-7

Съдържание

ВЪВЕДЕНИЕ	5
1. КОМПОЗИТНИ СЛОЕСТИ ПЛОЧИ / ГРЕДИ	
1.1. Предварителни бележки	13
1.2. Анизотропна еластичност	14
1.2.1. Кинематика	14
1.2.2. Кинетика	16
1.2.3. Структурни уравнения	17
1.2.4. Уравнения на термоеластичността и електроеластичността	20
1.3. Принципи на виртуалната работа	23
1.3.1. Виртуална работа	23
1.3.2. Принципи	25
1.4. Въведение в композитните материали	26
1.4.1. Основни положения и терминология	26
1.4.2. Структурни уравнения на един слой	27
1.4.3. Трансформация на напреженията, деформациите и	29
1.4.4. Конструктивни съотношения на напреженията в равнина	33
2. СТРУКТУРНА ТЕОРИЯ НА СЛОЕСТИ ПЛОЧИ	
2.1. ЕЕС теории за ламинати	35
2.2. Класическа теория на слоести плочи	36
2.2.1. Предположения	36
2.2.2. Премествания и деформации	37
2.2.3. Конструктивни уравнения на слой	41
2.2.4. Уравнения на движението	42
2.2.5. Конструктивни уравнения на композита	47
2.2.6. Уравнения на движението за преместванията	48
2.3. Коровини при специални композити	50
2.3.1. Едно-слоести плочи	50
2.3.2. Симетрични многослоести плочи	53
3. ЕДНОМЕРЕН АНАЛИЗ НА СЛОЕСТИ ГРЕДИ	
3.1. Въведение	55
3.2. Управляващи уравнения	56
3.3. Огъване	58
3.4. Вибрации	60
3.5. Композитна греда на Тимошенко	61
3.5.1. Управляващи уравнения	61
3.5.2. Огъване	62
3.5.3 Вибрации	64
4. АНАЛИЗ НА СПЕЦИАЛНО ОРТОТРОПНИ ЛАМИНАТИ С КТСП ТЕОРИЯТА	
4.1. Въведение	65
4.2. Огъване на шарнирно закрепени правоъгълни ламинати	66
4.2.1. Управляващи уравнения	66
4.2.2. Решение по метода на Навие	67
4.3. Огъване на ламинати с два противоположни ръба закрепени шарнирно	71
4.3.1. Решение по метода на Леви	71
4.3.2. Аналитични решения	72

4.3.3. Решение по метода на Райлеф-Ритц	75
4.4. Огъване на правоъгълни ламинати при различни гранични условия	77
4.4.1. Постановка чрез виртуалната работа	77
4.4.2. Запънати ламинати	77
4.4.3. Апроксимиращи функции за други гранични условия	78
4.5. Вибрации на шарнирно закрепени ламинати	80
4.6. Вибрации на ламинати с два успоредни ръба закрепени шарнирно	81
4.6.1. Директно интегриране	82
4.6.2. В пространството на състоянията	83
4.7. Динамичен анализ	83
4.7.1. Вариране на решението в пространството	84
4.7.2. Интегриране по времето	85
4.8. Едно точно решение за ламинати от ФПМ и ПФК материали	86
4.8.1. Метод	86
4.8.2. Решение за ФПМ слоя	88
4.8.3. Решение за ПФК слоя	89
4.8.4. Оценяване на решението	91
5. АНАЛИЗ НА СЛОЕСТИ КОМПОЗИТИ С МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ	
5.1. Въведение	93
5.2. Слоести греди в КТСП	94
5.2.1. Управляващи уравнения	94
5.2.2. Слаба форма	96
5.2.3. Полудискретизиран модел на краен елемент	96
5.2.4. Дискретизация по времето	99
5.2.5. Обединяване на уравненията на елементите	101
5.3. Теория на Тимошенко за слоеста греда	102
5.3.1. Полудискретизиран МКЕ модел	102
5.3.2. Напълно дискретизирани МКЕ модели	105
5.3.3. МКЕ модел на греда с два симетрично разположени пиезоелектрически слоя	106
5.4. МКЕ модели за слоести плочи (класическа теория)	112
5.4.1. Слаби форми	112
5.4.2. Пространствена апроксимация	114
5.4.3. Полудискретизиран МКЕ модел	116
5.4.4. Напълно дискретизиран МКЕ модел	117
5.4.5. Четириъгълни крайни елементи и числено интегриране	118
5.4.6. Пресмятане на напреженията	122
5.5. МКЕ модели на ламинати с пиезоелектрически слоеве	123
5.5.1. Композитна плоча (КТСП)	123
5.5.2. Композитна плоча (ТДПР)	128
5.6. МКЕ модел на строителни структури	138
5.6.1. Едномерен модел на многоетажна сграда	138
5.6.2. Модел на комплекс от сгради	140
5.6.3. Модел на сграда с активен масов драйвер	143
ЛИТЕРАТУРА	145

ВЪВЕДЕНИЕ

Драматичното нарастване на употребата на композитни материали от всички типове в инженерните структури (космически, подводни, автомобилни структури, както и медицински протези, спортни съоръжения и др.) и количеството списания и публикувани статии през последните две десетилетия показват усилията за създаване на системи от композитни материали, за тяхното изучаване, моделиране и проектиране, както и за тяхното управление.

Темата за композитни материали е наистина една интердисциплинарна област, където учени от материалознанието, математици, физици, химици, химически инженери, машинни инженери, структурни инженери допринасят за общото дело. Работите, които се публикуват в тази област могат да се разделят условно на три групи: материалознание, механика и моделиране, и проектиране и управление. Тази книга разглежда въпроси от областта на механиката и моделирането на композитни многослоести структури.

Мотивацията за този труд идва от многогодишната изследователка и преподавателска работа на автора в областта моделирането на слоести композитни структури и на строителни структури. Той обхваща основно направление от тематиката за структури: математическото им моделиране. Под слоести композитни структури ще разбираме слоести плочи, пластини и греди. Строителните структури са сгради, ферми, скелета. Към математическото моделиране се разглеждат теория на ламинатите, включваща механико-математическото моделиране на структурите както и някои аналитични решения, построяването на линеаризирани дискретизирани модели с метода на крайните елементи. В книгата се съдържат основополагащи знания в разглежданата област, аналитични решения и решения с крайни елементи, които отразяват изследванията в тази област през последните 20 години. Включено получаването на уравненията на движения за класическата теория на деформации на слоести плочи, обсъждат се характеристиките на коравината на ламинати. Разглежда се класическата теория на слоести греди и плочи при огъване.

В част 1 §§ 1.1 – 1.3 са представени някои необходими за по-нататъшните изследвания математически знания, уравнения за анизотропни материали и принципи на виртуалната работа. В § 1.4 е въведена общоприетата терминология за композитни материали, последвана от обсъждане на структурните уравнения на един слой и от съответната трансформация на напреженията и деформациите. В част 2 се получават уравненията на движение за класическата теория на деформиране на слоести плочи и се дават коравините на някои слоести композитни плочи. В част 3 се разглежда деформационна теория на композитни греди. Разгледани са аналитични решения за огъване, вибрации и динамична реакция на прости структури на греда. Част 4 е посветена на анализ на специално ортотропни правоъгълни слоести плочи с помощта на Класическата теория на слоести плочи. Обсъждат се параметричните ефекти на анизотропията на материала и на различните схеми на съставяне на композита. Изследвано е влиянието на съотношението между пластове върху отместванията при

огъването и върху напреженията, както и върху честотите при вибрации и върху, динамичната реакция. Разгледани са аналитични решения при огъване, натуралната вибрация и динамичната реакция на правоъгълна слоеста плоча на основата на подходите на Навие и Леви. Също така се обсъжда решение по метода на Райлейх-Ритц за ламинати, при които не може да се приложи подхода на Навие. В част 5 на главата се разглежда анализ на композитни слоести плочи с метода на крайните елементи. Обсъждат се едномерен (за греди) и двумерен (за плочи) модели с крайни елементи на основата на класическата теория за слоести плочи. Представени са конкретни модели за греди и плочи, съдържащи пиезоелектрически слоеве (действащи като датчици и управляващи устройства), и на сгради (представени като система от плочи и греди).

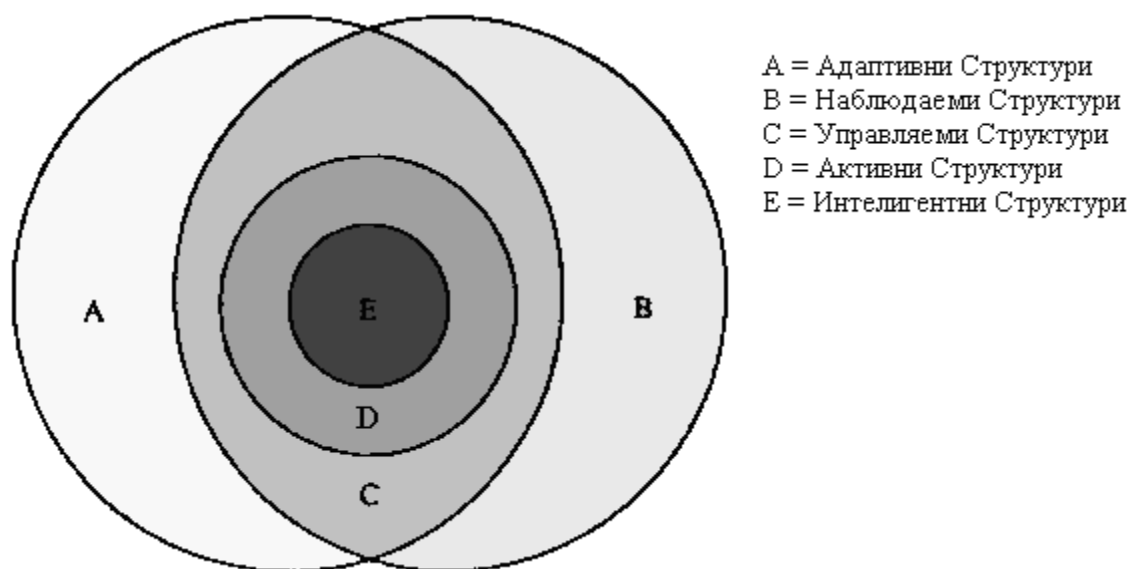
Строгите изисквания към поведението на гъвкавите структури изискват наблюдаването и управляването на тези структури по подходящ начин. Това обстоятелство е особено важно за космическите и самолетните структури, за които изискванията при изпълнението на поставените задачи са извънредно високи и отклонението от тези изисквания може да доведе до сериозни последствия. Затова изследователската работа и преподавателската дейност, извършвана в областта на моделирането и управлението на гъвкави структури, се развива успоредно с прогреса в космическите технологии и тясно взаимодейства със самолетната индустрия.

Мониторингът и управлението на гъвкави структури се изпълнява удобно чрез дискретното разполагане на датчици и управляващи устройства, които действат според избрания закон на управление. Много математически модели и модерни техники са разработени в последните години и са предназначени да отговорят на предизвикателството към определянето на управления за гъвкави структури при специални условия. Материалите, от които се изработват датчиците и управляващите устройства, също са важни, тъй като те влияят на такива фактори като точност, надеждност, приспособимост, издръжливост, тегло и т.н. Начинът на монтиране на датчиците и управляващите устройства е друг важен фактор при управляване поведението на гъвкавите структури.

Подходите при управление на структури могат да се представят със следната обща схема на Фиг.1. Адаптивната структура (множество **A**) притежава управляващи устройства, но не и датчици и работи с така нареченото програмно управляване. Наблюдаваната система (множество **B**) притежава датчици за мониторинг на състоянието на системата (както в случая на мониторинг на сгради), но не и управляващи устройства. Управляемата структура (множество **C** – сечението на множества **A** и **B**) притежава и датчици и управляващи устройства. Активна структура (множество **D**) е управляема структура, която притежава интегрирани датчици и управляващи устройства, които изпълняват и структурни и управляващи функции. **Интелигентна структура** (множество **E**) е активна структура, която интегрира в най висша степен управляваща логика и електроника в допълнение към внедрените датчици и управляващи устройства. „Умната” структура съдържа материали от ново поколение, такива като пиезоелектрици като външен слой.. В настоящата работа ще бъде използван по-известният в нашата литература термин интелигентна структура, въпреки че ще

разглеждаме „умни” структури съдържащи пиезоелектрически материал и компютърна система, които позволяват активно наблюдение и реакция на средата, в която се намира, по строго управляван начин (Фиг.2).

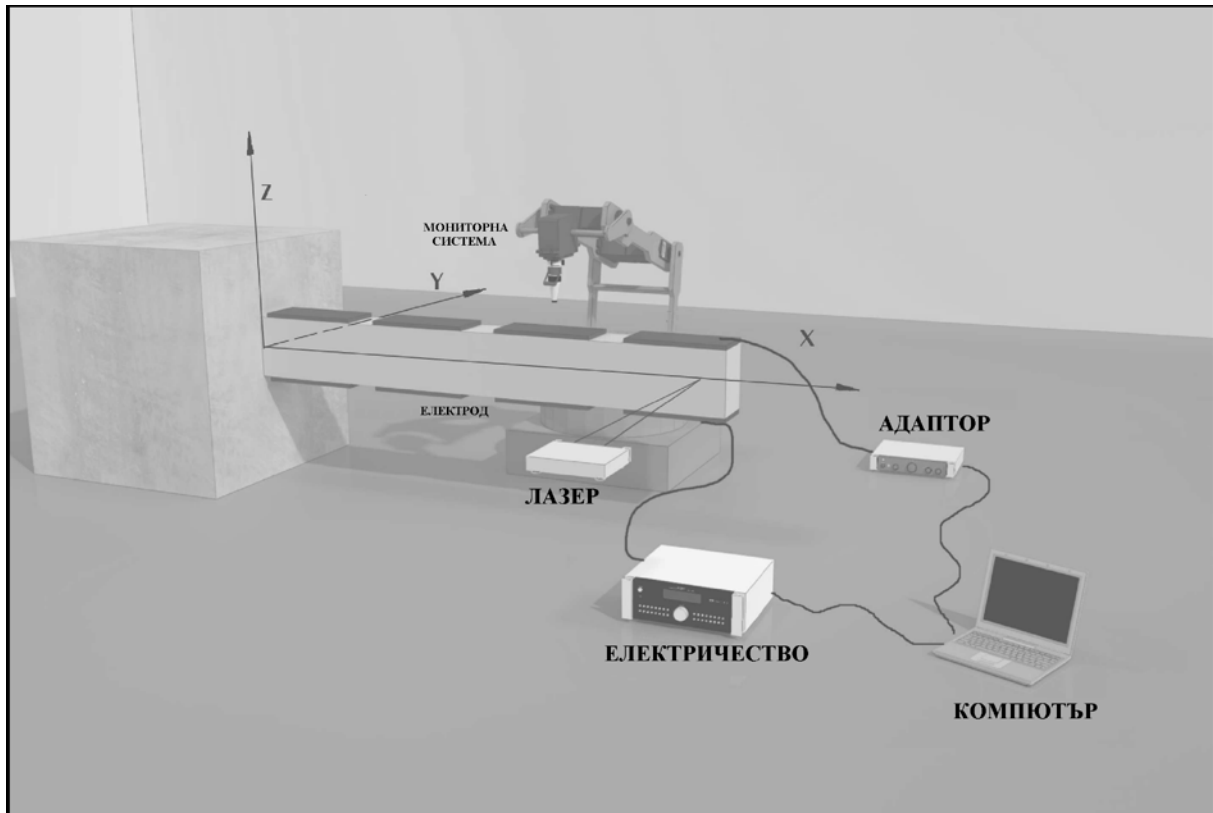
Характеристиките на разпределена деформация и преместване са основните за един материал да бъде използван като датчик или управляващо устройство. Пиезоелектрическият ефект се използва най-широко при разпределения мониторинг, при задвижване на гъвкави структури и при потушаване на вибрации. Той е бил първоначално открит преди повече от едно столетие, но употребата му за датчици и управляващи устройства на гъвкави структури е относително нова. Пиезоелектрическият феномен се основава на взаимодействието между приложено електрическо поле и породената от него деформация или приложена деформация и породилото се от нея електрическо поле и от така генерираните огъващи моменти в някои кристали, керамични материали и филми. Пиезо-механиката се смята за част от мехатрониката.



Фигура 1. Обща схема на подходите при структурно управление

Ефективността на преноса на енергия от пиезоелектрическите пластове към основната структура зависи от динамичните коефициенти на материала. Пиезоелектричните материали могат да бъдат прикрепени към повърхността на основните структури или внедрени като вътрешен слой. Затова изучаването на такива структури започва с моделирането им като слоести такива. Прикрепването може да бъде директно или индиректно чрез вискозно-еластични или твърди ограничаващи слоеве. И в двата последни случая вибрацията на структурата се намалява чрез дисипация на енергията в допълнителните слоеве. Предимство на прикрепването към повърхността на дискретни пиезоелектрически датчици и управляващи устройства е лесният достъп и възможност за поддръжка, но това води до проблема за подходящото им разполагане, и допълнително, прикрепените на повърхността материали могат да бъдат податливи на повреди по време на използването. В случая на прикрепени

на повърхността пиезоелектрически пластове допълнително се изучават аспектите на робастност и вибрации за композитната структура, която е податлива на деламинация (отлепване на пиезоелектрическия слой).



Фигура 2. Интелигентна система

Авторът изказва дълбока благодарност на акад. Васильев С.Н., акад. Черноусько Ф.Л., проф. Рутковский В.Ю., проф. Поляк Б.Т., проф. Ставролакис Г.Е. и на проф. Мерзоев К.А. за цялостната им подкрепа при работата над този труд. Авторът изказва специални благодарности на ст.н.с. I ст. д.т.н. Суханов В.М. за всеотдайната му помощ при редактирането на някои части от работата.

Поради това, че един от пластове в изучаването и моделирането на слоеви структури ще бъде пиезоелектрически слой, даваме кратни сведения за пиезоелектриците. Има две основни явления, които позволяват пиезоелектричните материали да бъдат използвани като датчици и управляващи устройства. Първото явление е известно като директен пиезоелектрически ефект, при което прилагането на механична сила или напрежение към даден пиезоелектрически материал произвежда електричество. Второто явление е известно като обратен пиезоелектрически ефект, при което прилагането на електричество към материала поражда деформации т.е. премествания. Ние ще разгледаме и моделираме система състояща се от гъвкава греда като основна структура и прикрепени на повърхността ѝ пиезоелектрически слоеве (Фиг.2). Единият пиезоелектрически слой ще отчита деформациите на гредата генерирайки електрически потенциал спрямо напрежението в гредата. Този слой

в теория на управлението се нарича датчик. Към другия пиезоелектрически слой ще се подава подходящ електрически потенциал и ще причинява свиващо действие, което ще влияе на движенията на структурата. Този слой е активиращ слой и при добавяне на управление играе ролята на управляващо устройство.

Нелинейната пиезоелектрическа теория се занимава с динамиката на анизотропни пиезоелектрически черупки, подложени на големи премествания. Тази теория разглежда такива ефекти като големи отмествания, ортотропни свойства на пиезоелектрическия материал, зависимостта на пиезоелектрическите коефициенти от деформациите, произволни ориентации на пиезоелектрическите материали. Независимо, че нелинейната пиезоелектрическа теория е добре разработена, поради малките структурни вибрации, които се срещат най-често, и възникващите усложнения с нелинейността, линейните уравнения на пиезоелектричността често се използват от изследователите. Линеината пиезоелектрическа теория предполага квази-статическо движение, т.е. механичните и електрическите сили са уравновесени във всеки момент. Уравненията на линеината пиезоелектричност са следните

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}^t \mathbf{S} + \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E} \quad \mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e} \mathbf{E} \quad (1)$$

където \mathbf{D} , \mathbf{T} , \mathbf{S} , \mathbf{E} са векторите на количеството електричество за единица пространство, напрежението, деформацията и силата на електрическото поле, съответно, \mathbf{e} е матрицата от пиезоелектрически константи, $\boldsymbol{\epsilon}^S$ е диелектричната матрица при постоянна деформация, и \mathbf{c}^E е еластичната матрица при постоянно електрическо поле. В ур. (1) горният индекс t означава транспониране на матрица. Първото от ур. (1) описва директния, а второто от ур. (1) описва обратния пиезоелектрически ефект.

Директният пиезоелектрически ефект е бил докладван за първи път от братята Кюри през 1880 год., а обратният пиезоелектрически ефект е бил теоретически предсказан от Липман. Отношенията между пиезоелектричността и кристалната структура са били обстойно изследвани от Воигт през 1894 год. Директният пиезоелектрически ефект е бил използван през Първата Световна Война за генериране на акустични вълни от пиезоелектрически кристален кварц. Първият пиезоелектрически кристал с фероелектрически свойства е бил широко използван през Втората Световна Война при подводните звукови трансдюсери. Някои пиезоелектрически материали, които се използват понастоящем са LiNbO_3 , ZnO , AlN , PVF_2 , PZT и др. PZT е материал с високи пиезоелектрически, диелектрически и еластични коефициенти. Допълнително PZT има силна пиезоелектрическа реакция и спонтанна поляризация. Заради тези си свои свойства PZT има голямо приложение в гъвкави системи, поради това, че има малко тегло, голяма точност и голяма ефективност. При изследването и моделирането на многослоести интелигентни структури в настоящата работа се използва PZT .

Греди, плочи, черупки, ферми, пръстенови структури са основни структурни елементи, които се използват активно при моделирането на структурите, анализа и синтеза на управление на тяхното поведение и форма чрез пиезоелектрически материали. Например, крилата на летателните апарати често се моделират

математически като тънкостенни греди. Особен интерес представляват теориите за композитни плочи съчетани с пиезоелектрически сензори и управляващи устройства. В голяма част от литературата, уравненията на системата в тези случаи се получава като се използва принципа на Хамилтон и линейната теория за пиезоелектрици. Предмет на изследванията са статичният анализ и форма, както и изучаване на динамиката им. В случаите, когато това е възможно, резултатите се потвърждават експериментално, в други случаи резултатите се подкрепят чрез компютърни симулации.

Важни параметри на пиезоелектрическите слоеве за тяхната работа са деформацията, коравината, линейността, топлинната чувствителност, силата, плътността и ефективността. Сравняването на различни конфигурации от пиезоелектрически слоеве показва широк диапазон от възможни реализации на сила и на преместване. Например, една от пречките за по-широко използване на пиезоелектрическите слоеве в самолетостроенето са изискванията към игнорирането на топлинни ефекти в електронните устройства. Друго ограничение при приложенията им е насищането. Пиезоелектрическите материали губят своите качества, когато подаваното електрическо напрежение премине границата от 500 волта. PZT материалите предлагат относително големи възможности при деформации и са по-малко чувствителни към температурните промени, затова са едни от най-предпочитаните за управляващи устройства на интелигентни многослоести структури. Някои пиезокерамични слоеве са твърдо пресовани, което води до големи сили и малки отклонения, което ги прави удобни при в определени случаи на подтискане на вибрации. Като особеност може да се отбележи, че честотните граници на пиезоелектрическите материали са значително по-високи от изискванията при структурното и акустично управление за предизвикване на еластични вълни при някои честоти.

Много изследвания са посветени на плочи, снабдени с пиезоелектрици за модифициране на тяхното поведение. Аналитичните изследвания на пиезоелектрически слоеве, прикрепени на повърхността на тънки плочи, са важна част от изследванията. Основен подход тук е силите, генерирани от пиезоелектрическите слоеве, да се оценяват със статически анализ и да се добавят към уравненията на движение на плочата. Теориите на многослоести тънки плочи и принципът на Хамилтон се използват в теоретичния анализ на плочи съдържащи пиезоелектрически слоеве. В едни от тях слоестият композит се разглежда като еквивалентен на единствен пласт. В други, всеки слой се управлява локално чрез пиезоелектрическо устройство, за да се подтискат вибрациите на глобално ниво. Работи се и върху оптимизирането на геометрията и на волтажа, който следва да се приложи към пиезоелектрическия слой с цел да се минимизират вибрациите.

Директният пиезоелектрически ефект е дал възможност пиезоелектрическите материали да се използват като датчици в обширни разнообразни области още от откриването му преди повече от сто години. Пиезоелектрическите датчици превръщат деформацията респективно преместването в електрически заряд. Важни фактори за изследвания тук са чувствителността към

деформацията/преместването, пространствената резолюция, честотните граници, температурната чувствителност, линейността и хистерезиса. Чувствителността на пиезоелектрическите датчици към деформации е от порядъка на 10^4 волта при подходящи натоварвания и геометрии, и техните честотни граници се разпростират върху редица конвенционални подходи за управление на структури. Обикновено пиезоелектрически материали се интегрират със силиконови микро машинни структури и се формират микро-механични датчици с много малки размери, което позволява монолитното им взаимодействие с електронните вериги в един и същ чип. Пиезоелектрици се разполагат и по повърхността на структурата, за замерване на механични ефекти като налягане, ускорение, сила и позиция. В настоящата работа е широко застъпено използването на пиезоелектрически датчици за оценяване състоянието на изследваните структури (греди, плочи и сгради) и за влияние на тяхното динамично поведение.

Въпросите свързани с местоположението и геометрията на пиезоелектрическите слоеве и техния оптимален избор по отношение на дадени критерии за качество привличат вниманието поради тяхната важност в мониторинга и управлението на структури. Изследва се зависимостта между оптималната дебелина на пиезоелектрика и неговото местоположение в структурата както и ефектът при влияние върху вибрациите. Разглежда се отношението на дебелините на пиезоелектрика и основната структурата с цел максимизиране на статичната/динамичната ответна реакция.

Съществуват аналитични решения на линейните диференциални уравнения на пиезоелектрици на основата на вълновото уравнение и ортогоналност на пиезоелектрическите вибрации. Но поради сложността на аналитичните вълнови уравнения в двумерния и тримерния случай се използват апроксимиращи техники за решаването на тези уравнения като квадратична минимизация и вариационни принципи.

Формулировката на пиезоелектрическа среда чрез метода на крайни елементи (МКЕ) може да се получи от принципа на Хамилтон за най-малкото действие. Моделирането на пиезоелектрическа среда чрез МКЕ и приложенията в задачи за наблюдения и управления заемат значителна част от изследванията на интелигентните композитни структури. Голямата част от разработките са свързани с МКЕ анализ на греди и плочи, снабдени с пиезоелектрически слоеве. МКЕ се използва за моделиране на динамичното поведение на запънати структури, подложени на външни влияния. МКЕ заедно с модален анализ се използва за анализ и синтез на управление на греди, плочи, дискове с крайни отношения на дебелина и другите размери. Разработват се нови крайни елементи в зависимост от особеностите на разглежданата композитна структура. Резултатите получени чрез моделиране с МКЕ се сравняват с теоретични и експериментални резултати.

Като заключение може да се отбележи, че през последните две десетилетия много изследователска дейност е посветена на пиезоелектрическите материали и тяхното използване за наблюдение и управление на гъвкави структури.

1. КОМПОЗИТНИ СЛОЕСТИ ПЛОЧИ / ГРЕДИ

1.1. Предварителни бележки

Композитните материали се състоят от два или повече материала, които заедно дават желани свойства, които не могат да бъдат постигнати от всеки от компонентите поотделно. Композитните материали с усиленни влакна, например, се състоят от влакна с голяма здравина и голям модул във вид на материал-матрица. Железобетонът с внедрените в бетон усиленни стоманени пръти представляват пример за композит с усиленни влакна.

Композитните материали се изучават на различни нива: атомно ниво, нано ниво, на ниво единични пластове на кристалическа решетка, като група от кристали и т.н. С цел да се обхване по-добре поведението на материала, в настоящата работа като основна материална единица се приема онази, която има свойства като модул, якост, термални коефициенти на разширение, електрическа устойчивост и т.н., чиито амплитуди при движение зависят от посоката. Зависимостта на свойствата от посоката е резултат от вътрешно атомните граници, които са „по-силни” в едно направление от колкото в други направления. Материалите се разглеждат такива, че основните единици са подредени така, че желаното свойство е максимизирано в дадено направление. Влакната представляват пример за такива материали. Когато материалите са организирани така, че основните им единици са произволно ориентирани, то полученият материал има една и съща стойност на дадено свойство в средно статистически смисъл във всички направления. Такива материали се наричат *изотропни*. Постоянният стремеж на учените е да създават по-добри материали за специфични приложения. Материалите на фибрите и матриците използвани в композитите са метални. или неметални.

Композитните материали усиленни с влакно, използвани в структурите, се правят във формата на тънки пластове, наречени *ламинати*. Един ламинат е макро единица от материал с познати свойства. Структурните елементи, като пръти, греди или плочи се формират чрез наслагване на пластове, за да се постигнат желана здравина и коравина. Ориентацията на влакната във всеки ламинат и последователността на наслагването на пластове може да се избере така, че да се постигне желана здравина и коравина за специфично приложение. В хода на разглежданията ще бъдат изписани уравненията, които описват съответната кинематика на деформацията, уравненията на равновесие и реакцията на материала на слоести структурни елементи.



Фигура 1.1. Основни етапи при моделиране на слоести композити

Анализът на структурни елементи от слоести композитни материали включва няколко стъпки. Както е показано на Фиг.1.1., такъв анализ изисква знания за анизотропна еластичност, структурни теории (кинематика на деформациите) на ламинати, аналитични или числени методи за намиране на решения на управляващите уравнения, теории за грешките, за да се предпазят модите от повреди и да се определят натоварванията, при които се получават повреди, и теория на управлението за минимизиране и предотвратяване на повреди, деформации и вибрации. В тази глава втора от работата се разглежда детайлно теоретична формулировка и решение на управляващите уравнения на слоести композитни плочи. Гредите се разглеждат като частен случай на плочи, при които едната равнинна размерност е много по-малка от другата.

1.2. Анизотропна еластичност

Уравненията, управляващи движението на твърдо тяло могат да бъдат класифицирани в четири основни категории:

- (1) Кинематични (уравнения за деформации и преместванията)
- (2) Кинетични (консервация на движения)
- (3) Термодинамични (първи и втори закон на термодинамиката)
- (4) Структурни (отношения между напрежение и деформация)

Тези уравнения се допълват чрез подходящи граници и начални условия на съответната задача.

1.2.1. Кинематика

Описание на движението. Едно твърдо тяло \mathbf{V} е множество от материални частици, които се идентифицират чрез взаимно еднозначно съответствие с

точките на дадена област Ω от \mathbf{R}^3 . Позицията на всички материални точки на \mathbf{B} в даден момент време се нарича *конфигурация* на структурата. Математическото описание на конфигурацията във всеки момент време изисква фиксирана в пространството координатна система. Ние разглеждаме структурна система (деформируемо тяло) \mathbf{B} с известна геометрия, структура и натоварване. При някои ограничения в структурата и натоварването, тялото ще изпитва движение и/или деформация (т.е. геометрични промени вътре в тялото).

Деформации и премествания. Изразът *деформация на тяло* определя относителните премествания и промени в геометрията произтичащи в тялото. Всяка частица X в тялото отговаря на тройка координати $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$. Когато тялото се деформира под въздействие на външни сили, частицата X се премества в нова позиция $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Преместваното на частицата \mathbf{X} се дава чрез

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{или} \quad u_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i \quad (1.1)$$

Ако преместването на всяка частица в тялото е известно, ние можем да определим новата (деформирана) конфигурация \mathbf{C} от недеформираната конфигурация \mathbf{C}^0 .

Тензорът на деформациите \mathbf{E} може да се зададе чрез градиентите на преместванията като

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T - \mathbf{I}] & E_{jk} &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) - \delta_{jk} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T] & &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Тензорът \mathbf{E} е симетричен $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ ($E_{ij} = E_{ji}$). Когато не са направени предположения за големината на деформациите, тези деформации се наричат крайни. Деформация, при която дължината на всеки линеен елемент остава непроменена е движение на твърдо тяло. Следователно, необходимо и достатъчно условие едно тяло да се движи като твърдо е всички компоненти на неговия тензор E_{ij} да бъдат нула навсякъде в тялото.

Ако градиентите на преместванията са достатъчно малки $|\partial u_i / \partial X_j| \ll 1$, така че техните квадрати и произведения да бъдат пренебрежими в сравнение с $|\partial u_i / \partial X_j|$, тензорът на деформациите \mathbf{E} се редуцира до *безкрайно малкия тензор на деформациите*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.3)$$

и разликата между $\partial u_i / \partial x_j$ и $\partial u_i / \partial X_j$ изчезва. Безкрайно малкия тензор на деформациите може да се запише още във вида

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \gamma_{12} \equiv 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \gamma_{13} &\equiv 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_{23} \equiv 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (1.4)$$

където с γ_{ij} по традиция са означени срязващите деформации.

Уравнения за съвместимост. По дефиниция, компонентите на тензора на деформациите могат да се пресметнат от диференцируемото поле на преместванията. Обаче, ако са дадени компонентите на тензора на деформациите, и ако се изисква да бъдат намерени трите компоненти на преместването, дадените деформации трябва да бъдат такива, че да съществува единствено решение на шестте диференциални уравнения. Съществуването на единствено решение се гарантира, ако компонентите на безкрайно малките деформации удовлетворяват следните шест условия за съвместимост

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} = 0 \quad (1.5)$$

за всяко $i, j, m, n, = 1, 2, 3$. За двумерния случай, уравнение (1.5) се редуцира до единствено уравнение за съвместимост

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (1.6)$$

Уравненията за съвместимост са удовлетворени автоматически, когато деформациите образуват поле. Следователно, проверката на уравненията за съвместимост е необходима само, когато деформациите се пресмятат от напрежения, които са в равновесие.

1.2.2. Кинетика

Напрежения и тяхната мярка. *Напрежение* в точка е мярка на сила за единица област. Силата Δf на единица област, действаща върху елементарна област Δs на деформируемото тяло се нарича вектор \mathbf{T} на напреженията:

$$\mathbf{T} \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} \quad (1.7)$$

Вторият закон на Нютон дава връзката между вектора на напреженията $\mathbf{T}^{(\hat{n})}$ върху равнина с единична нормала \hat{n} и тензора на напреженията $\boldsymbol{\sigma}$ на Коши

$$\mathbf{T}^{(\hat{n})} = \hat{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \hat{n} \quad (1.8)$$

Уравнения на движението. Разглеждаме дадена маса на материално тяло V , която във всеки момент заема обема Ω , ограничен от повърхнина Γ . Тялото е подложено на външни сили \mathbf{T} (за единица повърхнина) и \mathbf{f} (за единица обем). Консервативния принцип твърди, че общият линеен момент на дадена

непрекъснатата среда е равен на векторната сума на всичките външни сили действащи върху тялото, което първоначално заемало конфигурация C^0 , при условие, че третият закон на Нютон за действието и противодействието управлява инерционните сили. Принципът води до уравненията на движението:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (1.9)$$

където ∇ е градиентният оператор по отношение на координатите \mathbf{x} , и ρ е плътността на материала в деформираното тяло. Всички променливи са функции на текущите координати \mathbf{x} и на времето t .

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad \text{или} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

При описание на материал, пълната производна по времето е равна на частната производна по времето, защото разглежданата частица остава непроменена: $dx/dt = \partial X/\partial t + \partial u/\partial t = 0 + \partial u/\partial t$.

Ур. (1.9) може да бъде изразено още чрез втория тензор на напреженията (на Пиола-Кирхоф) \mathbf{P} спрямо първоначалните координати \mathbf{X} .

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{x}) + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial X_j} \left[P_{jm} \left(\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \right) \right] + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.10)$$

където ρ_0 е плътността на първоначалната конфигурация. Когато преместванията и техният градиент са малки, тензорът на Пиола-Кирхов \mathbf{P} е приблизително равен на тензора на напреженията на Коши σ . Уравненията на движение за малки премествания са

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) \quad (1.11)$$

1.2.3. Структурни уравнения

Обобщен закон на Хук се отнася до деветте компоненти на напреженията и до деветте компоненти на деформациите.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.12)$$

където ε_{kl} са компонентите на безкрайно малките деформации, σ_{ij} са компонентите на напреженията на Коши, и C_{ijkl} са материалните коефициенти. Ур. (1.12) съдържат 81 материални константи, но поради това, че двата вектора ε_{kl} и σ_{ij} са симетрични само 36 от тях са независими. Нека запишем ур. (1.12) в следната удобна форма

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

където C_{ij} са независимите еластични коефициенти и

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \end{aligned}$$

Моноклинични материали. Когато еластичните коефициенти във всяка точка имат една и съща стойност за всяка двойка, които са огледални образи една на друга по отношение на дадена равнина, материалът се нарича моноклиничен. Ако за равнина на симетрия приемем $x_3 = z = 0$, матрицата на преобразование T и матрицата на еластични коефициенти C се получават във вида:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

която съдържа само 13 независими коефициента.

Ортотропни материали. Когато съществуват три взаимно ортогонални равнини на симетрия, броят на еластичните коефициенти се редуцира до 9. Такива материали се наричат ортотропни. Съотношенията на деформациите и напреженията за ортотропен материал имат формата

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1.15a)$$

Връзката между коефициентите C_{ij} в ур. (1.15) и използваните в инженерната област коефициенти E_{ij} , ν_{ij} , G_{ij} е следната:

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_1 \cdot \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{12} = E_1 \cdot \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} \\ C_{13} &= E_1 \cdot \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}, \quad C_{22} = E_2 \cdot \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{23} &= E_2 \cdot \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta}, \quad C_{33} = E_3 \cdot \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} \\
C_{44} &= G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12} \\
\Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}, \quad \frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)
\end{aligned} \tag{1.156}$$

където E_1, E_2, E_3 са модулите на Юнг в трите посоки, съответно. ν_{ij} са коефициентите на Поасон, определени като отношението на напречната деформация в j -тата посока към осовата деформация в i -тата посока, и G_{12}, G_{13}, G_{23} са модулите на срязване в съответните равнини.

Трансферзално изотропни материали са особено важни при изучаването на композитни материали с усилени влакна. Те са специален случай на ортотропния материал, чиито материални коефициенти са едни и същи по отношение на осите 1 и 2 и са инвариантни по отношение на произволна ротация относно дадена ос. Ако оста на ротация е $x_3 = z$, то матриците на преобразование и на коефициентите са следните

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [C] &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \\
C_{66} &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})
\end{aligned} \tag{1.16}$$

където θ е произволен ъгъл на завъртане в равнината x_1x_2 относно оста x_3 . Матрицата от коефициенти съдържа само пет независими коефициента.

Изотропни материали нямат преференциални посоки (т.е. безбройно много равнини на материална симетрия) и броят на независими еластични коефициенти се редуцира на 2. В този специален случай ур. (1.7) приема вида

$$\sigma_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \epsilon_{kl} \tag{1.17}$$

където λ и μ са еластичните константи на Ламе и δ_{ij} е символът на Кронекер. Константите на Ламе са свързани със срязващия модул G , модулът на Юнг E и коефициентът на Поасон по следния начин:

$$\begin{aligned}
\mu \equiv G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\
C_{11} = C_{22} = C_{33} &= \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda \\
C_{44} = C_{55} = C_{66} &= \mu
\end{aligned}$$

Така накратко бяха представени структурните уравнения за линейни еластични материали в отсъствие на термални ефекти. Когато към механичните се добавят термални и електрически ефекти, се получават структурните уравнения на термоеластичността електроеластичността, които представляват

интерес при изучаването на интелигентни материали и структури. Затова те ще бъдат представени накратко.

1.2.4. Уравнения на термоеластичността и електроеластичността

Термодинамични принципи. От четирите принципа на термодинамиката първият и вторият са важни при изучаването на деформируеми твърди тела. Първият закон на термодинамиката (*принцип за запазване на енергията*), гласи, че размерът на изменение на пълната енергия във времето е равна на сумата от размера на работа на приложената сила и на изменението на топлинното съдържание за единица време. Вторият закон на термодинамиката за необратими процеси гласи, че произведената ентропия е положителна.

Термодинамичните принципи могат да се изразят чрез деформацията на твърди тела като

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q + \sigma : \dot{\epsilon} \quad (1.18)$$

където T е температурата, \mathbf{q} е векторът на температурния поток, Q вътрешно генерираната топлина (за единица обем), ρ е плътността, c_{ij} е специфичната топлина при постоянен обем или постоянна деформация, σ е векторът на напреженията, $\dot{\epsilon}$ скоростта по времето на тензора на деформациите.

Електроеластичността отразява явления, причинени от взаимодействието между електрически и механични полета. Пиезоелектрическият ефект е едно такова явление и той е свързан с ефектът от електрическото въздействие върху деформацията. При тези задачи силата на електричеството, която се прилага, за да въздейства на дадена структура, дава допълнителна сила на тялото при анализа на напреженията, както и температурното поле индуцира сила в тялото чрез термални деформации.

Пиезоелектрическият ефект се описва чрез вектора на поляризация \mathbf{P} , който представлява електрическият момент на единица обем или силата на поляризация за единица област. Той е свързан с тензора на напреженията със съотношението

$$\mathbf{P} = \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{или} \quad P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (1.19)$$

където \mathbf{d} тензор от трети ред на пиезоелектрическите модули. Обратният ефект дава връзка между вектора на електрическото поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и вектора на линейните деформации $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{d} \quad \text{или} \quad \epsilon_{ij} = d_{kij} \mathcal{E}_k \quad (1.20)$$

Тензорът d_{kij} е симетричен поради симетрията на ϵ_{ij} ($i, j, k = 1, 2, 3$).

Термоеластичността е друго явление, което е свързано с температурни промени при поляризация на материал. За малки температурни промени ΔT изменението във вектора на поляризация ΔP се дава със съотношението

$$\Delta P = p \Delta T \quad (1.21)$$

където p е векторът на термоеластичните коефициенти.

Връзката между механичното, температурното и електрическото полета се установява с термодинамичните принципи и на уравненията на Максвел. Аналогично на функцията на деформационната енергия U_0 за еластичността и функцията на Хелмхолц за свободната енергия Ψ_0 , предполагаме съществуването на функция Φ_0 на енталпията

$$\begin{aligned} \Phi_0(\epsilon_{ij}, \mathcal{E}_i, T) &= U_0 - \mathcal{E} \cdot \mathbf{D} - \eta T \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} - e_{ijk} \epsilon_{ij} \mathcal{E}_k - \beta_{ij} \epsilon_{ij} \theta - \frac{1}{2} \epsilon_{kl} \mathcal{E}_k \mathcal{E}_l - p_k \mathcal{E}_k \theta - \frac{\rho c_v}{2T_0} \theta^2 \end{aligned}$$

така че

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathcal{E}_i}, \quad \eta = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}$$

където σ_{ij} са компонентите на напреженията, D_i са компонентите на вектора на електрическото преместване и η е ентропията. Последните две уравнения дават структурните уравнения на деформируема пиезоелектрическа среда.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{ijk} \mathcal{E}_k - \beta_{ij} \theta & \sigma_i &= C_{ij} \epsilon_j - e_{ik} \mathcal{E}_k - \beta_i \theta \\ D_k &= e_{ijk} \epsilon_{ij} + \epsilon_{kl} \mathcal{E}_l + p_k \theta & D_k &= e_{kj} \epsilon_j + \epsilon_{kl} \mathcal{E}_l + p_k \theta \\ \eta &= \beta_{ij} \epsilon_{ij} + p_k \mathcal{E}_k + \frac{\rho c_v}{T_0} \theta & \eta &= \beta_i \epsilon_i + p_k \mathcal{E}_k + \frac{\rho c_v}{T_0} \theta \end{aligned} \quad \text{покоординатно} \quad (1.22)$$

където C_{ijkl} са еластичните модули, e_{ijkl} са пиезоелектрическите модули, e_{ij} са диелектрическите константи, p_k са термоелектрическите константи, β_{ij} са коефициентите на температурно разширение, c_v е специфичната топлина за единица маса и T_0 е началната температура. Тъй като топлопроводимостта, разпространяването на влагата и електрическият потенциал се управляват от диференциални уравнения с една и съща форма, тук и трите са представени във форма на транспортно уравнение. При обобщаването на уравненията, по подразбиране се предполага, че скаларните потенциалите на температурата, влагата и електричеството са определени чрез решаването на съответните управляващи уравнения (т.е. ур. на Фурие за топлопроводимостта, втория закон на Хук и ур. на Максвел) като са групирани едно с друго чрез структурни уравнения.

Уравнения между деформациите и преместванията:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.23a)$$

Уравнения на движението ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.23б)$$

Транспортно уравнение ($\varphi = T, c, \psi$):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + f = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.23в)$$

Структурни съотношения (за моноклиничен пиезоелектрически материал):

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 - \alpha_{11} \Delta T \\ \epsilon_2 - \alpha_{22} \Delta T \\ \epsilon_3 - \alpha_{33} \Delta T \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 - 2\alpha_{12} \Delta T \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ e_{14} & e_{24} & 0 \\ e_{15} & e_{25} & 0 \\ 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.23г)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.23д)$$

Уравнения (1.23) се решават за дадена геометрия, натоварване, начални и гранични условия.

1.3. Принципи на виртуалната работа

При аналитичното описание на даден физичен процес често се правят предположение относно начина на протичане на процеса. Управляващите уравнения в такъв случай се дават като се използват принципите на физиката. Така получената система уравнения представлява *математически модел* на процеса.

Използването на законите на Нютон за определяне на управляващите уравнения на дадена структурна задача изисква изолирането на типичен елемент от обема на структурата с всички негови приложения и реактивни сили. За сложни системи тази процедура става много тежка и непривлекателна. Допълнително, типът на граничните условия, които следва да бъде използван заедно с получените уравнения, не винаги е ясен. В такива случаи алтернативни подходи за получаване на управляващите уравнения и техните решения се дават от принципите за енергията. В настоящия труд се използват принципите на виртуалната работа за получаване на уравненията на движението на слоести плочи. За намиране на решенията на някои определени задачи за плочи ще бъдат използвани методите на Райлей-Ритц (Rayleigh-Ritz) и Галеркин. Принципът на виртуалната работа и вариационните методи също имат директно отношение към метода на крайните елементи, който е признат като най-мощният при числения анализ и определяне на приблизителни решения за практически всички задачи за структури. В тази част от работата ще изложим накратко концепциите за виртуални премествания и сили и за работа и енергия.

1.3.1. Виртуална работа

Виртуални премествания и сили. Множеството от конфигурации, което удовлетворява геометричните ограничения, но не непременно втория закон на Нютон, се нарича *множество от допустими конфигурации*. Тези конфигурации са ограничени в околност на истинската конфигурация, така че те се получават от безкрайно малки нейни вариации. По време на такива вариации геометричните ограничения на системата не се нарушават и всички сили са определени с техните реални стойности. Когато една механична система изпитва такива вариации в своята конфигурация, се казва че тя е подложена на *виртуални премествания* от нейната истинска конфигурация. Преместванията се наричат *виртуални*, защото ние си представяме, че те заемат място (хипотетични), за разлика от актуалните при натоварвания. Виртуалните премествания в точките от геометричната граница са необходимо нули.

Аналогично на концепцията за виртуални премествания, може да мисли и за *виртуални сили* за една система. Виртуалните са множество от сили, които са в равновесие помежду си. Тези сили могат да бъдат или вътрешни или външни, и не е необходимо те да имат някакво отношение към актуалните сили на системата.

Външна и вътрешна виртуална работа се извършва от актуалните сили при виртуални премествания или от виртуални сили при актуални премествания.

Виртуалната работа W , извършена от актуалните сили \mathbf{F} в едно тяло Ω_0 при движение чрез виртуални премествания $\delta \mathbf{u}$, и виртуалната работа W^* извършена от виртуалните сили $\delta \mathbf{F}$ при движение чрез актуалното преместване \mathbf{u} , се дават с

$$\delta W = \int_{\Omega_0} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv, \quad \delta W^* = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \, dv \quad (1.24)$$

Тук всички променливи се отнасят до първоначалната конфигурация C^0 .

Външната виртуална работа V , извършена при виртуални премествания $\delta \mathbf{u}$ в твърдо тяло Ω_0 и подложено на сили \mathbf{f} на единица обем и на сили \mathbf{T} за единица повърхнина на границата, и *външната виртуална работа* V^* , извършена от виртуални сили $\delta \mathbf{f}$ и повърхнинни сили $\delta \mathbf{T}$ по повърхността Γ_u на твърдо тяло Ω_0 при движение чрез актуалните премествания \mathbf{u} се дават с

$$\delta V = - \left(\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\Gamma_u} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \right), \quad \delta V^* = - \left(\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \, ds \right) \quad (1.25)$$

Отрицателният знак показва, че работата се извършва върху тялото.

Вътрешната виртуална работа от виртуалното преместване $\delta \mathbf{u}$ може да бъде пресметната по следния начин. Да предположим, че безкрайно малък материален елемент от обем $d\Omega = dV = dX_1 dX_2 dX_3$ на тялото изпитва виртуални деформации δE_{ij} причинени от виртуалните премествания δu_i . където ур. (1.2)

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + u_{m,j} \delta u_{m,i} + u_{m,i} \delta u_{m,j}), \quad u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

Тогава вътрешна виртуална работа, извършена от сили породени от всички деформации в елемента (който първоначално е заемал материалния елемент dv) при движение чрез техните съответни премествания, е

$$(P_{11} \cdot \delta E_{11} + P_{22} \cdot \delta E_{22} + \dots + P_{12} \cdot 2\delta E_{12}) dv = P_{ij} \cdot \delta E_{ij} dv$$

Извършената пълна вътрешна виртуална работа се получава чрез интегриране на горното уравнение по целия обем на тялото

$$\delta U = \int_{\Omega_0} P_{ij} \delta E_{ij} \, dv \quad (1.26)$$

Ур. (1.26) е вярно за всяко материално тяло независимо от неговото конструктивно поведение и се нарича още *виртуална деформационна енергия*.

Извършената от виртуални напрежения δP_{ij} , вътрешна виртуална работа при движение от актуални деформации E_{ij} , е

$$\delta U^* = \int_{\Omega_0} E_{ij} \delta P_{ij} \, dv \quad (1.27)$$

Ур. (1.27) е известно като *допълнителна виртуална деформационна енергия*.

1.3.2. Принципи

Ще повторим, че виртуалната работа, извършена от виртуални премествания, е работата, извършена от актуални сили при преместване на тялото чрез виртуални премествания, които са съвместими с геометричните ограничения. Всички приложени сили се смятат постоянни по време на виртуалните премествания. Да разгледаме твърдо тяло, на което действа множество от приложени сили F_1, F_2, \dots, F_n , и предпологаме, че точките на прилагане на тези сили изпитват независими виртуални премествания $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$. *Външната виртуална работа*, извършена от виртуалните премествания, е

$$\delta V = -[\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{u}_n] = - \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i \quad (1.28)$$

Извършената *вътрешна виртуална работа* $\delta U = 0$ е нула, защото едно твърдо тяло не изпитва никакви деформации (виртуалните деформации са нула). Освен това, всички виртуални премествания $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$ трябва да бъдат равни.

Принцип на виртуалните премествания играе важна роля при формулирането на теорията за плочи и техния анализ с вариационни методи. Той твърди, че ако непрекъснато тяло е в равновесие, виртуалната работа на всички актуални сили при движение чрез виртуално преместване са нула:

$$\delta U + \delta V \equiv \delta W = 0, \quad \text{или} \quad \int_{\Omega_0} (P_{ij} \delta E_{ij} - f_i \delta u_i) dv - \int_{\Gamma_\sigma} T_i \delta u_i ds = 0. \quad (1.29)$$

Според ур. (1.12) за деформациите и напреженията, виртуалните напрежения δE_{ij} са свързани с виртуалните премествания δu_i чрез

$$\delta E_{ij} = \delta \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) \right], \quad u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

Тъй като $\delta u_m = 0$ върху Γ_u и виртуалните премествания са произволни в Ω_0 и върху Γ_σ , получаваме

$$\begin{aligned} [P_{ij}(\delta_{mi} + u_{m,i})]_{,j} + f_m &= 0 \quad \text{вътре} \quad \Omega_0 \\ [P_{ij}(\delta_{mi} + u_{m,i})]n_j - T_m &= 0 \quad \text{върху} \quad \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ур. (1.30) са уравненията на Ойлер-Лагранж за тяло подложено на големи деформации. За случая на малки деформации и премествания, ур. (1.30) се редуцират до

$$\begin{aligned} \sigma_{mj,j} + f_m &= 0 \quad \text{вътре} \quad \Omega_0 \\ \sigma_{mj}n_j - T_m &= 0 \quad \text{върху} \quad \Gamma_\sigma \end{aligned} \quad (1.31)$$

Принцип за минимума на пълната потенциална енергия е специален случай на принципа на виртуалните премествания. За еластични тела (при

отсъствие на температурни изменения) съществува функция на плътност на деформационната енергия U_0 такава, че

$$\mathbf{P} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{или} \quad P_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial E_{ij}}$$

Принципът на виртуалните премествания от ур. (1.29) в този случай може да се изрази чрез плътността на деформационната енергия U_0 :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} dv - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} T_i \delta u_i ds \right] = 0 \quad (1.31)$$

Първият интеграл е равен на

$$\int_{\Omega_0} \delta U_0 dv = \delta U \quad (1.32)$$

където U е потенциалът на енергията на вътрешната деформация. Да предположим, че съществува потенциал V , чиято първа вариация е

$$\delta V = - \left[\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} ds \right] = - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} T_i \delta u_i ds \right]$$

Тогава принципът за виртуалната работа приема формата

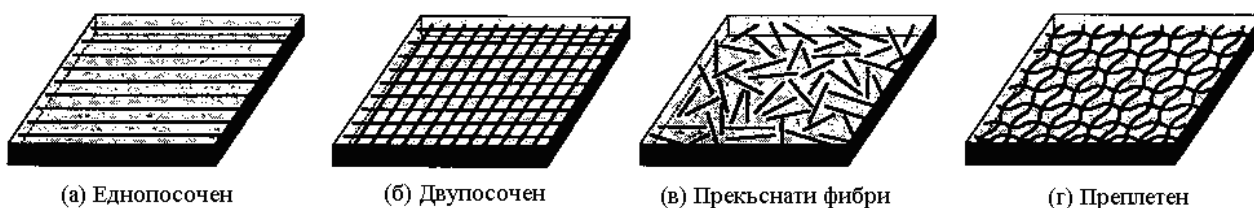
$$\delta U + \delta V = \delta(U + V) \equiv \delta \Pi = 0 \quad (1.33)$$

Сумата $U + V = \Pi$ се нарича *пълна потенциална енергия* на еластичното тяло. Ур. (1.33) е известно като принцип за минимума на потенциалната енергия.

1.4. Въведение в композитните материали

1.4.1. Основни положения и терминология

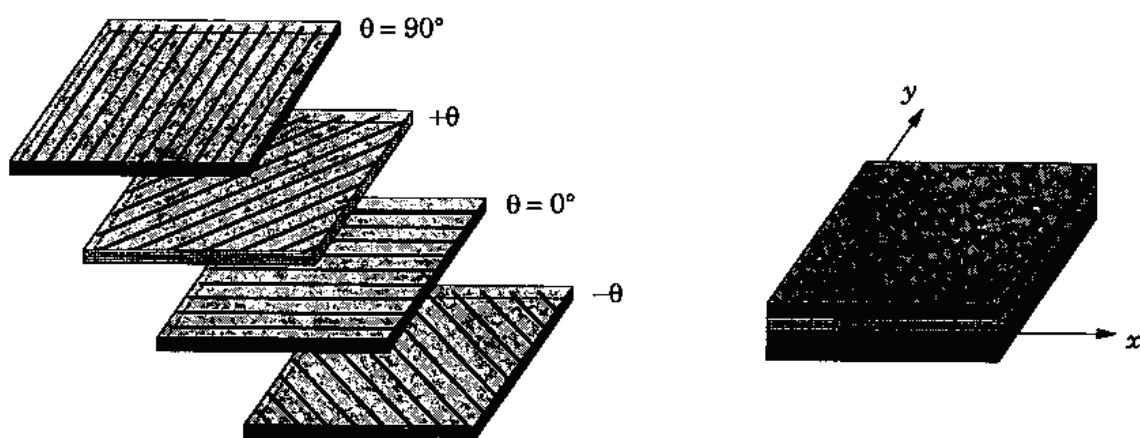
Нека повторим, че композитните материали са онези, които са формирани от комбинирането на два или повече материала на макроскопично ниво, така че те имат по-добри механични свойства от обикновените материали. Някои от свойствата, които могат да бъдат подобрени чрез формиране на композитни материали са коравина, здравина, намаляване на теглото, издръжливост на корозия, уморяемост, издръжливост на износване.



Фигура 1.2. Различни композити усилен с фибри

Композитни материали се формират обикновено по три различни начина: (1) композити, които съдържат влакна от един материал в матрица от друг материал; (2) композити с макро частици от един материал в матрица от друг; (3) слоести композити (ламинати), които са направени от пластове различни материали, включващи композити от първите два типа. Частиците и матрицата в отделните композити могат да бъдат или метални или неметални.

Отделен *слой* (пласт) е типичен лист от композитен материал. Той представлява основния блок за изграждане. Слой усилен с фибри се състои от много фибри внедрени в материал-матрица. Фибрите могат да бъдат непрекъснати или прекъснати, преплетени, еднопосочни, двупосочни, или произволно внедрени (Фиг.1.2). Еднопосочен пласт усилен с фибри проявява максимални здравина и модул в посоката на фибрите, но той има много слаба здравина и малък модул в посоката напречна на фибрите.



Фигура 1.3. Композит от слоеве с различна ориентация на фибрите

Слоестият композит (ламинат) е събрание от слоеве насложени, за да се постигне желана коравина и дебелина. Например, еднопосочни слоеве усилен с фибър могат да бъдат насложени така, че фибрите на всеки слой да бъдат ориентирани в различни посоки (Фиг.1.3).

В настоящия труд се разглеждат слоести структури и техните статични и времеви характеристики и поведението им при вибрации.

1.4.2. Структурни уравнения на един слой

При извеждането на структурните уравнения на един слой, ние предполагаме следното:

- (1) слой е непрекъснатата среда, т.е. няма процепи или празни пространства.
- (2) слой се държи като линейно еластичен материал.

Първото предположение е равнозначно на разглеждане на *макро-механичното* поведение на слоя. Второто предположение означава, че е валиден обобщеният закон на Хук.

Композитните материали са силно хетерогенни от микроскопична гледна точка. От макроскопична гледна точка, където материалните свойства на композитите се получават от осредняване с тегла на съставните материали, фибър и матрица, композитните материали се предполагат хомогенни.

Обобщеният закон на Хук за анизотропен материал при изотермални условия се дава с ур. (1.12) за правоъгълна декартова координатна система (x_1, x_2, x_3) , фиксирана в тялото. Често ламинатите усилены с фибри се характеризират като ортотропни, т.е. материали, имащи три ортогонални равнини на материална симетрия. Ако координатните равнини са избрани успоредни на трите ортогонални равнини на материална симетрия, съотношенията между напреженията и деформациите се дават с ур. (1.15), а тези между деформациите и напреженията могат да се запишат по следния начин

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

където S_{ij} са компонентите на матрицата $[S] = [C]^{-1}$.

Линейните термоеластични структурни уравнения (1.22) приемат формата

$$\sigma_j = C_{ji}[-\alpha_i(T - T_0) + \varepsilon_i], \quad \varepsilon_j = S_{ji}\sigma_i + \alpha_i(T - T_0) \quad (1.35)$$

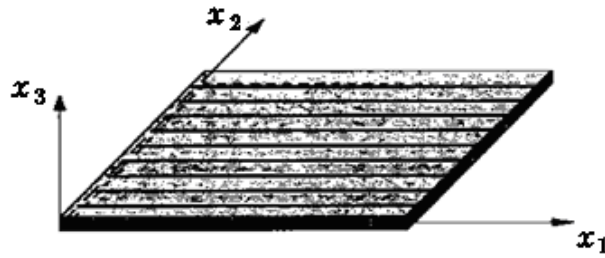
За ортотропни материали коефициентите $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ са нула, а за изотропни материали имаме допълнително $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$. В този случай, коефициентите на коравина C_{ij} могат да се изразят чрез механичните константи – модул на Юнг, коефициент на Поасон и сръзвещ модул, на ур. (1.156). Ур. (1.34) между деформациите и напреженията могат да се изразят в матрична форма

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

Ортотропният материал има само девет независими материални константи

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$$

От физични съображения модулите на Юнг и сръзвещите модули се приемат положителни.



Фигура 1.4. Еднопосочен композит усилен с фибър в материална коорд. с-ма (x_1, x_2, x_3)

Еднопосочен слой усилен с фибри се разглежда като ортотропен материал, чиито равнини на материална симетрия са успоредна и перпендикулярна на посоката на фибъра. Материалната координатна ос x_1 се взема успоредна на фибъра, оста x_2 е перпендикулярна на посоката на фибъра и на равнината на слоя (Фиг.1.4), и оста x_3 е перпендикулярна на равнината на слоя.

Допълнително предполагаваме, че

1. Фибрите са прикрепени перфектно към матрицата.
2. Фибрите са успоредни и равномерно разпределени навсякъде.
3. Матрицата не съдържа шупли или микро пукнатини и първоначално в нея няма напрежения.
4. И фибрите и матрицата са изотропни и се подчиняват на закона на Хук.
5. Приложените сили са или успоредни или перпендикулярни на посоката на фибрите.

Означаваме с E_f, ν_f, V_f модула, коефициента на Поасон и обема на фибъра и с E_m, ν_m, V_m модула, коефициента на Поасон и обема на матрицата.

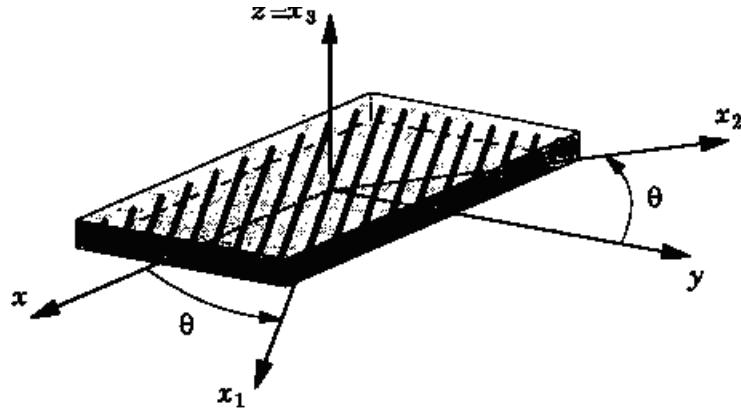
1.4.3. Трансформация на напреженията и деформациите

Координатна трансформация. Нека (x, y, z) са координатите, използвани при решаването на дадена задача, и нека (x_1, x_2, x_3) са главните материални координати, като (x_1, x_2, x_3) се получават от (x, y, z) чрез завъртане на xy -равнината обратно на часовниковата стрелка на ъгъл θ около z -оста и обратно (Фиг.1.5) чрез трансформациите:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1.37a)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (1.37b)$$

Ще отбележим, че $[A]^{-1} = [A]^T$.



Фигура 1.5. Композит усилен с фибри в глобална и материална коорд. системи

Трансформация на компонентите на напрежението. Разглеждаме съотношенията между компонентите на напрежението в двете координатни системи. Нека σ е тензорът на напреженията, който има компоненти $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33}$ в материалните координати (x_1, x_2, x_3) и компоненти $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$ в глобалната координатна система на ламината (x, y, z) . Тъй като напреженията се дават с тензор от втори ред, съществуват следните съотношения между двете множества от компоненти в матрична форма

$$\begin{aligned} [\sigma]_m &= [A][\sigma]_p[A]^T \\ [\sigma]_p &= [A]^T[\sigma]_m[A] \end{aligned} \quad (1.38)$$

Където $[A]$ е 3×3 матрицата от директорните косинуси от ур. (1.37). Изпълнявайки умножението, получаваме зависимостта на $\{\sigma\}_p$ от $\{\sigma\}_m$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m \quad (1.39)$$

и зависимостта на $\{\sigma\}_m$ от $\{\sigma\}_p$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\}_m = [R]\{\sigma\}_p \quad (1.40)$$

Трансформация на компонентите на деформацията. Деформациите са също тензор и връзката се задава с уравненията

$$\begin{aligned} [\varepsilon]_m &= [A][\varepsilon]_p[A]^T \\ [\varepsilon]_p &= [A]^T[\varepsilon]_m[A] \end{aligned} \quad (1.41)$$

Поради това, че

$$2\varepsilon_{12} = \varepsilon_6, \quad 2\varepsilon_{13} = \varepsilon_5, \quad 2\varepsilon_{23} = \varepsilon_4$$

ур (1.41) приемат вида

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1.42)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

Трансформация на материалните коефициенти. Когато разглеждаме задачата за композитна структура, управляващите уравнения с всички техни променливи и коефициенти трябва да се изпишат в глобалните координатите на композита.

Прилагайки ур. (1.12) – (1.13) в уравненията за трансформация на напреженията и деформациите (1.40) – (1.43) получаваме

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m = [T][C]_m\{\varepsilon\}_m = [T][C]_m[T]^T\{\varepsilon\}_p \quad (1.44)$$

или $\{\sigma\}_p = [\bar{C}]\{\varepsilon\}_p$, където $[\bar{C}] = [T][C][T]^T$ и $[C]_p \equiv [\bar{C}]$, $[C]_m \equiv [C]$, $[C]_m$ е 6×6 матрица на коравината на материала ур. (1.13) в материалните координати и $[T]$ е матрицата на трансформацията от ур. (1.39).

Когато имаме работа с ортотропен материал и матрицата $[C]$ се определя с ур. (II.1.15a), ур. (II.1.44) прима специалния вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.45)$$

където \bar{C}_{ij} са трансформирани еластични коефициенти, отнесени към глобалната координатна система на композита.

Аналогично за трансформацията на деформациите имаме

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_p &= [R]^T \{\varepsilon\}_m = [R]^T ([S]_m \{\sigma\}_m) = [R]^T [S]_m ([R] \{\sigma\}_p) \equiv [S]_p \{\sigma\}_p \\ [S]_p &\equiv [\bar{S}] \quad [S]_m \equiv [S] \quad [\bar{S}] = [R]^T [S] [R] \end{aligned} \quad (1.46)$$

За ортотропен материал матрицата $[S]$ има формата в ур. (1.34) и съотношенията за деформациите и напреженията в координатите на композита приемат формата

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{31} & \bar{S}_{32} & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} & 0 \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{36} & 0 & 0 & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

Термалните коефициенти α_{ij} са компоненти на тензор от втори ред. Тук ненулевите компоненти са $\alpha_{11} = \alpha_1$, $\alpha_{22} = \alpha_2$ и $\alpha_{33} = \alpha_3$. Следвайки ур. (1.39) трансформационните съотношения са

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta \\ \alpha_{yy} &= \alpha_{11} \sin^2 \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta \\ 2\alpha_{xy} &= 2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \sin \theta \cos \theta \\ 2\alpha_{xz} &= 0, \quad 2\alpha_{yz} = 0, \quad \alpha_{zz} = \alpha_{33} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Съотношенията за трансформация (1.45)- (1.47) са верни за правоъгълна координатна система (x_1, x_2, x_3) , която е ориентирана на ъгъл θ в x_1 -равнината в координатната система (x, y, z) .

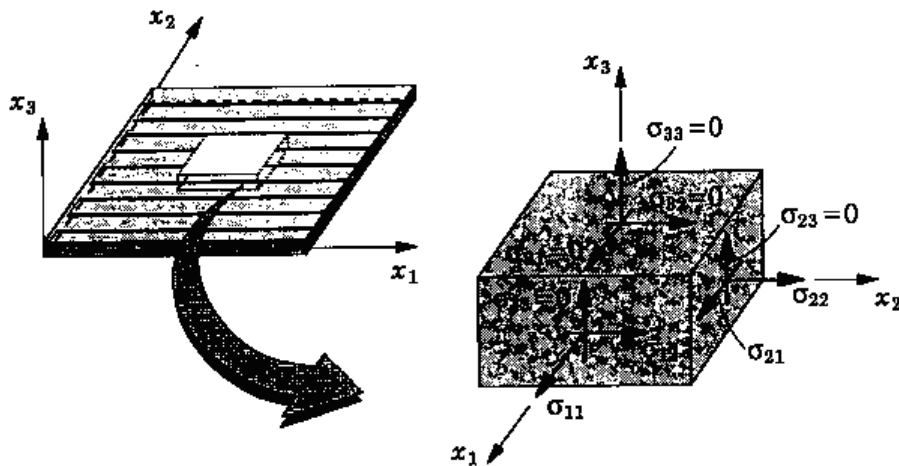
Ур. (1.15) представляват съотношенията между напреженията и деформациите в главните материални координати (x_1, x_2, x_3) , а ур. (1.34) представляват съотношенията между деформациите и напреженията в координатната система на композита (x, y, z) . Материалните коефициенти на композита в координатната система (x, y, z) са свързани с материалните коефициенти в координатите на материала с ур. (1.44). Обобщено, за k -тия слой на ламинат, съотношенията между напреженията и деформациите в координатната система на ламината могат да се запишат по следния начин

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_p^{(k)} &= [\bar{C}]^{(k)} \left(\{\varepsilon\}_p^{(k)} - \{\alpha_T\}_p^{(k)} (T - T_0) - \{\alpha_M\}_p^{(k)} (c - c_0) \right) \\ \{\varepsilon\}_p^{(k)} &= [\bar{S}]^{(k)} \{\sigma\}_p^{(k)} + \{\alpha_T\}_p^{(k)} (T - T_0) + \{\alpha_M\}_p^{(k)} (c - c_0) \end{aligned} \quad (1.49)$$

където всички величини са отнесени към координатната система (x, y, z) и $\{\alpha_T\}$ и $\{\alpha_M\}$ са вектори на термални хигроскопични коефициенти на разширение.

1.4.4. Конструктивни съотношения на напреженията в равнина

В равнинния случай, който е основния разглеждан в настоящия труд, всички напречни напрежения са пренебрежими. Повечето слоеви структури са типично тънки и отговарят на равнинно състояние на напреженията. За един слой в x_1x_2 -равнината компонентите на напречните напрежения са $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ (Фиг.1.6). Независимо, че тези напрежения са малки в сравнение с $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, те могат да причинят грешки, защото композитните ламинати усилен с фибри са слаби в напречна на фибъра посока. Затова напречните компоненти на напреженията не винаги могат да бъдат пренебрегнати при анализа на композити. Но където в теорията на ламинатите те са пренебрежими (такъв е случаят в настоящите разглеждания), конструктивните уравнения се модифицират предвид на това, че

$$\sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0 \quad (\sigma_{33} = 0, \sigma_{32} = 0, \sigma_{31} = 0)$$


Фигура 1.6. Композит в равнинно напрегнато състояние

За ортотропен слой, условие $\sigma_{33} = 0$ ур. (1.34) дава нулеви напречни деформации

$$\epsilon_4 = 0, \epsilon_5 = 0$$

Съотношенията за деформациите и напреженията за вътрешно равнинните компоненти на напрежението ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) се редуцират до

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 \quad (1.50)$$

Ур(1.50) може да бъде обърне в съотношение между напрежения и деформации

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (1.51a)$$

където *равнинните коравини на редуцираните напрежения* Q_{ij} , се дават с изразите

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \end{aligned} \quad (1.516)$$

В равнинния случай на напрежения, термоеластичните конструктивни уравнения за ортотропен слой с пиезоелектрически ефект могат да се изразят по следния начин материалната координатна система (x_1, x_2, x_3)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{Bmatrix}$$

(1.53)където Q_{ij} са коравини на редуцираните напрежения и ε_{ij} са пиезоелектричните модули, $(\sigma_i, \varepsilon_i, E_i, D_i)$ са напреженията, деформациите, електрическото поле и електрическите премествания, σ_1, α_2 са коефициентите на термално разширение по x_1 и x_2 посоките, а ΔT е температурната разлика от началния момент $\Delta T = T - T_0$.

Трансформираните съотношения между напрежения и деформации за ортотропен слой в равнинния случай имат вида

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (1.54)$$

2. СТРУКТУРНА ТЕОРИЯ НА СЛОЕСТИ ПЛОЧИ

Анализът на композитни плочи се основава на един от следните подходи:

- (1) Теории за еквивалентност с единствен слой (ЕЕС) (2-D равнинен случай)
 - (а) Теория на класическите ламинати
 - (б) Теория на ламинати при напречни деформации от първи ред
- (2) Теория на тримерна еластичност (3-D тримерен случай)
 - (а) Традиционни формулировки на 3-D три мерна еластичност
 - (б) Слоесто базирани теории
- (3) Методи с множествени модели (2-D и 3-D)

2.1. ЕЕС теории за ламинати

Теории за ламинати еквивалентни на единствен слой - ЕЕС теории за ламинати са тези, при които хетерогенна слоеста плоча се третира като статически еквивалент, единствен слой имащ комплексно конструктивно поведение, редуцирайки 3-D задачата за непрекъснати среди в 2-D задача. ЕЕС теориите се изграждат като се приема, че формата на полето на преместванията или полето на напреженията е линейна комбинация на неизвестни функции и на координатата на дебелината.

$$\varphi_i(x, y, z, t) = \sum_{j=0}^N (z)^j \varphi_i^j(x, y, t) \quad (2.1)$$

където φ_i е i -тата компонента на преместванията или напреженията, (x, y) са координатите в равнината, z е координатата на дебелината, t е времето, а φ_i^j са функциите, които следва да се определят. Когато φ_i са премествания, уравненията, управляващи φ_i^j се определят чрез принципа на виртуалните премествания (или неговата динамична версия, когато зависят от времето).

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (2.2)$$

Най-леката в математическо отношение ЕЕС теория на ламинати е *класическата теория на слоести плочи* КТСП, която е разширение на

класическата теория на Кирхоф за слоести плочи. Тя се основава на полето на преместванията

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

където (u_0, v_0, w_0) са компонентите на преместването по (x, y, z) координатните посоки на точка от средната равнина ($z = 0$). В полето на преместванията ур. (2.3) прави линии, нормални към x -равнината преди деформация, остават прави и нормални към средната повърхност и след деформация. Това предполага пренебрегването на напречните срязващи и напречните нормални ефекти, т.е. деформацията има единствено от огъване и от вътрешно равнинно разтягане.

Друга теория в йерархията на ЕЕС теориите за ламинати е *теорията за срязващи деформации от първи ред* СДПР, която се основава на поле на деформациите от следния вид

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

където ϕ_x, ϕ_y са ротации относно x и y -осите. Тази теория разширява кинетиката на класическата теория за слоести плочи, като включва големи напречни срязващи деформации в кинетичните си предположения, т.е. напречните срязващи напрежения се предполагат константни по отношение на координатата на дебелината.

И в двете теории се прави предположение за равнинно напрегнато състояние на плочата и се ползва редуцирана равнинно напрегната форма на структурните съотношения. И в двете теории се предполага, че напречните нормали не могат да се разтягат и да се огъват. Подобни разширения водят до теории за плочи от втори и трети ред.

2.2. Класическа теория на слоести плочи

2.2.1. Предположения

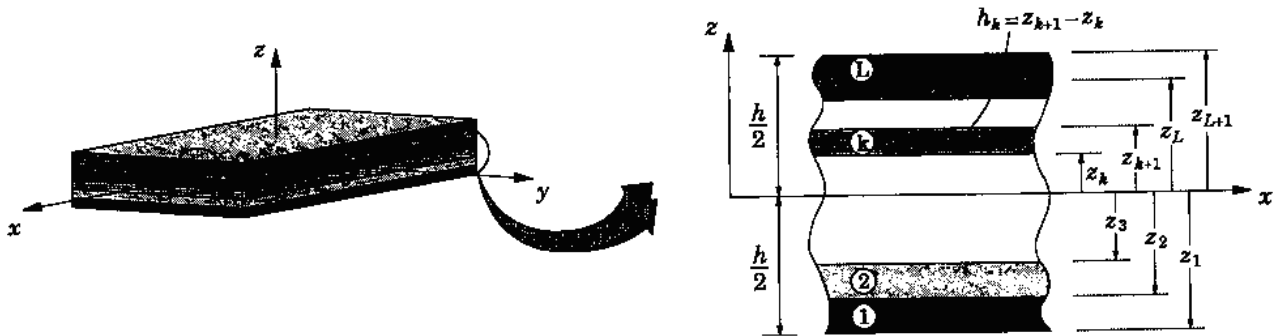
Класическата теория на слоести плочи (КТСП) е разширение на класическата теория за плочи в композитни ламинати. За създаването на математическия модел се предполага, че са в сила *хипотезите на Кирхоф*:

(1) Прави линии, перпендикулярни към средната повърхнина (напречни нормали) преди деформация, остават прави след деформация.

(2) Напречните нормали са неразтежими

(3) Напречните нормали се въртят така, че те остане перпендикулярни на средната повърхност след деформация.

Първите две предположения означават, че напречното преместване не зависи от напречната координата (дебелината) и напречната нормална деформация е равна на нула $\varepsilon_{zz} = 0$. Третото предположение като резултат дава нулеви напречни срязващи деформации $\varepsilon_{xx} = 0$, $\varepsilon_{yx} = 0$.



Фигура 2.1. Номериране на слоевете на ламинат спрямо коорд. система

2.2.2. Премествания и деформации

Разглеждаме плоча с обща дебелина h , съставена от N ортотропни слоя. Всеки слой има главни материални координати (x_1^k, x_2^k, x_3^k) $k=1, \dots, N$ и е ориентирани на ъгъл θ_k спрямо координатата x на ламината. За недеформируемата средна равнина Ω_0 на композита избираме x -равнината (Фиг.5). k -тият слой е разположен между точките $z = z_k$ и $z = z_{k+1}$. Цялата област $\bar{\Omega}_0$ на композита е тензорното произведение $\Omega \times (-h/2, h/2)$. Границата на $\bar{\Omega}_0$ се състои от горна повърхнина $S_t(z = h/2)$, долна повърхнина $S_b(z = -h/2)$ и ръбовете $\bar{\Gamma} \equiv \Gamma \times (-h/2, h/2)$ на ламината. Изобщо, Γ е криволинейна повърхнина с положителна нормала $\hat{n} = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y$. Различните части на границата $\bar{\Gamma}$ са подложени, изобщо, на комбинация от обобщени сили и обобщени премесвания. По нататък ще бъдат представени граничните условия.

За така описаната плоча правим следните допълнителни предположения:

- Пластовете са прикрепени един към друг перфектно (предположение).
- Материалът на всеки пласт е линейно еластичен и им две равнини на материална симетрия (т.е. ортотропен) (ограничение).
- Деформациите и премесванията са малки (ограничение).
- Напречните срязващи напрежения на горната и долната повърхнини на композита са нула (ограничение).

Според предположенията на Кирхоф една материална точка, заемаща позицията (x, y, z) в недеформирания композит се предвижда в позицията

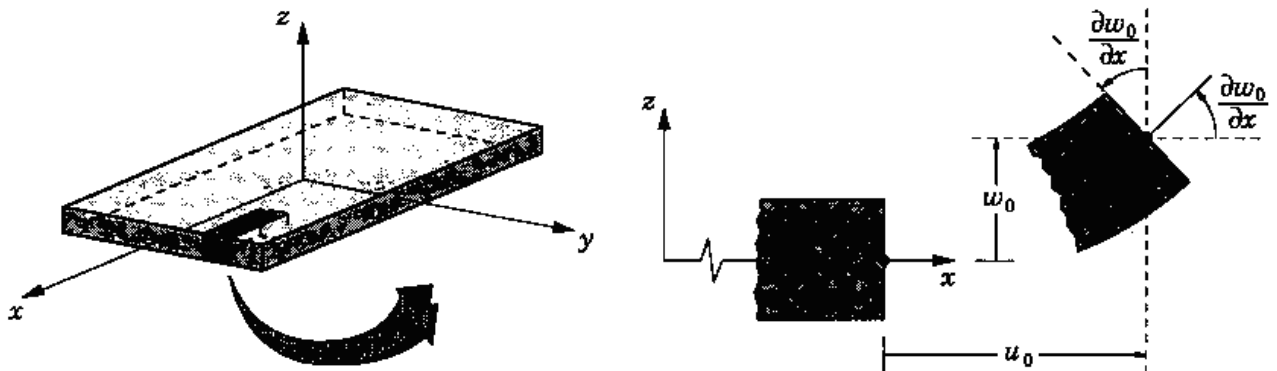
$(x + u, y + v, z + w)$ в деформирания композит, където (u, v, w) са координатите на вектора на преместванията по x, y, z осите. Имаме

$$\mathbf{u} = u\hat{e}_x + v\hat{e}_y + w\hat{e}_z \quad (2.5)$$

където $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ са единичните вектори по (x, y, z) координатите. Поради предположението за малки деформации и малки премествания, не се прави разлика между материалните координати и пространствените координати, между тензора на крайни деформации на Грийн и тензора на безкрайно малки деформации, и между втория тензор на напреженията на Пиола-Кирхоф и тензора на напреженията на Кожи. Хипотезите на Кирхоф изискват преместванията (u, v, w) да бъдат такива, че (Фиг.2.2.)

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

където (u_0, v_0, w_0) са преместванията на материална точка от xu -равнината. Формата на полето на преместванията ур. (2.5) позволява редукция на тримерната задача в двумерна, изучаваща деформациите на средната равнина ($z = 0$). След като бъдат намерени преместванията (u_0, v_0, w_0) на средната равнина, преместванията на всяка произволна точка (x, y, z) в тримерната непрекъсната среда могат да бъдат определени чрез ур. (2.5).



Фигура 2.2. Недеформирана и деформирана геометрии на ръб на Кирхоф плоча

Деформациите, свързани с полето на преместванията (2.6), могат да се изчислят от ур. (1.4):

$$\begin{aligned}
 E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
 E_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 E_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\
 E_{xx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
 E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ако компонентите на градиентите на преместванията са от порядък ϵ , т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} = O(\epsilon)$$

тогава предположението за малки деформации означава, че членовете от порядък $O(\epsilon^2)$ в деформациите са пренебрежими. Ако ротациите $\partial w_0/\partial x$ и $\partial w_0/\partial y$ на напречните нормали са умерени ($10^0 - 15^0$), то членове

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

са малки по отношение на ϵ , но не са пренебрежими и. Така ур. (2.7) приемат формата

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

където означенията ϵ_{ij} се използват на мястото на E_{ij} . Съответният втори тензор на напреженията на Пиола-Кирхоф ще отбелязваме с σ_{ij} . За полето на преместванията в ур. (2.6) имаме $\partial w/\partial z = 0$ и деформациите в ур. (2.7) се видоизменят в

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0, & \varepsilon_{zz} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

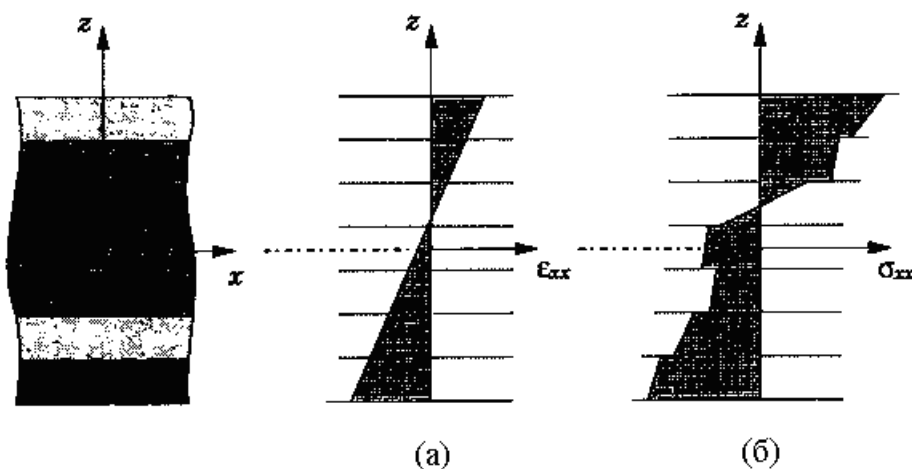
Деформациите в ур. (2.9) се наричат *деформации на фон Карман* (von Kármán), и съответната теория на плочите се определя като теория на плочите на фон Карман. Ще отбележим, че напречните деформации ($\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zz}$) са идентично нули в класическата теория на плочите.

Първите три деформации в ур. (2.9) имат формата

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \\
\{\varepsilon^0\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^1\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

където ($\varepsilon_{xx}^{(0)}, \varepsilon_{yy}^{(0)}, \gamma_{xy}^{(0)}$) са *мембранните* деформации и ($\varepsilon_{xx}^{(1)}, \varepsilon_{yy}^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}$) са огъващите деформации, известни като *кривини*.

След като станат известни деформациите (u_0, v_0, w_0) на средната равнина, деформациите на всяка точка (x, y, z) в плочата могат да се пресметнат с ур. (2.10). Ще отбележим, че в ур. (2.10) деформациите се изменят линейно по дебелината, и че те не зависят от измененията по дебелината на композита (фиг.2.3а). За фиксирана стойност на z , деформациите, като цяло, са нелинейни функции на x и y и за динамични задачи зависят от времето t .



Фигура 2.3. Изменения на деформации и напрежения по дебелината на слоевете в ламината: (а) вътрешно равнинна деформация; (б) съответното напрежение

2.2.3. Конструктивни уравнения на слой

В класическата теория на композити всички напречни деформации $\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ са нула по дефиниция. За композит с ортотропни слоеве с x_1x_2 - равнини на симетрия, ориентирани произволно по отношение на x_3 -равнината, напречните срязващи напрежения σ_{xz}, σ_{yz} също са нула. Тъй като $\varepsilon_{zz} = 0$, напречното нормално напрежение σ_{zz} , въпреки че не е идентично нула, не се появяват във виртуалната работа и, следователно, в уравненията на движението. Така на теория е на лице случай на равнинна деформация и равнинно напрежение. При все това, при практически разглеждания, тънка или умерено дебела плоча е в състояние на равнинно напрежение заради дебелината, която е малка в сравнение с размерите вътре в плочата. Следователно, могат да се ползват редуцираните конструктивни съотношения за равнинни напрежения. За k -тия ортотропен (пиезоелектрически) слой в главните материални координати те са

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2.11a)$$

където $Q_{ij}^{(k)}$ са равнинните редуцирани коравини и $e_{ij}^{(k)}$ са пиезоелектрическите модули на k -тия слой ур. (1.52), $\sigma_i, \varepsilon_i, E_i$ са компонентите на напрежението, деформацията и електрическото поле, отнесени към материалните координати x_1, x_2, x_3 , α_1, α_2 са коефициентите на термално разширение по x_1 и x_2 посоките, $\Delta T = T - T_0$ е температурното изменение.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.11b)$$

Тъй като композитите са направени от няколко ортотропни слоя, с материални оси ориентирани произволно по отношение на координатите на композита, конструктивните уравнения на всеки слой трябва да бъдат трансформирани към координатите (x, y, z) на композита. Така получаваме

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{32} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{36} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned} \tag{2.126}$$

$\alpha_{xx}, \alpha_{yy}, \alpha_{xy}$ са трансформираните коефициенти на термално разширение.

2.2.4. Уравнения на движението

Ще повторим, че напречните деформации $\gamma_{zz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_{zz}$ са идентично нули. От тук и срязващите напрежения σ_{xz}, σ_{yz} са нула за композит от ортотропни слоеве. Нормалното напрежение σ_{zz} не е нула поради ефекта на Поасон. Независимо от това и трите напрежения не влизат във формулировката, защото виртуалната им енергия на деформацията на заради кинематическата съвместимит ур. (2.9). Дали напречните напрежения се вземат предвид или не, те реално съществуват, за да държат плочата в равновесие и могат да бъдат определени на границата. Така, напречните напрежения не се включват в израза за енергията на виртуалната деформация, но те трябва да се вземат предвид в граничните условия и в равновесието на силите.

Тук, управляващите уравнения са получени от принципа на виртуалните премествания, като вземаме предвид термални и пиезоелектрически ефекти с уговорката, че материалните свойства не зависят от температурата, електрическите и полета, и че температурата T и векторът на електрическите премествания E са известни функции на позициите ($\delta T = 0$ и $\delta E = 0$). Така температурното и електрическото полета са включени във формулировката само чрез конструктивните уравнения ур. (1.23г).

Динамичната версия на принципа на виртуалната работа е

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \tag{2.13}$$

където енергията на виртуалните деформации δU , виртуалната работа на приложените сили δV и виртуалната кинетична енергия δK се дават с изразите

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz dx dy = \int_{\Omega_0} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\sigma_{xx} \left(\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} \right) + \sigma_{xy} \left(\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} \right) \right] dz \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{2.14a}$$

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} [(q_b(x, y) + q_t(x, y)) \delta w_0(x, y)] dx dy - \int_{\Gamma_\sigma} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\hat{\sigma}_{nn} \left(\delta u_{0n} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} \right) + \hat{\sigma}_{ns} \left(\delta u_{0s} - z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right) + \hat{\sigma}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds \quad (2.146)$$

$$\delta K = \int_{\Omega_0} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_0 \left[\left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (2.14B)$$

където q_b е приложената сила към долната повърхнина ($z = -h/2$), а q_t е приложената сила на горната повърхнина ($z = h/2$) на ламината, $\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{\sigma}_{nz}$ са компонентите на напрежението върху частта Γ_σ на границата Γ , $\delta u_{0n}, \delta u_{0ns}$ са виртуалните премествания по нормалата и тангентата на границата Γ , ρ_0 е плътността на материала на плочата, и точката означава производна по времето.

Замествайки δU , δV и δK от ур. (2.14) в ур. (2.13) и интегрирайки по дебелината на композита, получаваме:

$$0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} - q \delta w_0 - I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + I_1 \left(\frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \dot{u}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \dot{v}_0 + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) - I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right] dx dy - \int_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \right\} dt \quad (2.15)$$

където $q = q_b + q_t$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz, & \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \\ \begin{Bmatrix} \hat{N}_{nn} \\ \hat{N}_{ns} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} dz, & \begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{ns} \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} z dz \\ \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz, & \hat{Q}_n &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \hat{\sigma}_{nz} dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} са вътрешно равнинните резултанти на силите, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} са резултантите на моментите, Q_n резултанта на напречната сила и I_0, I_1, I_2 са масовите инерционни моменти.

Виртуалните деформации са функции на виртуалните премествания по същия начин както и реалните деформации са функции на реалните премествания ур. (2.9):

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{xx}^{(0)} &= \frac{\partial\delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial\delta w_0}{\partial x}, & \delta\varepsilon_{xx}^{(1)} &= -\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x^2} \\
\delta\varepsilon_{yy}^{(0)} &= \frac{\partial\delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial\delta w_0}{\partial y}, & \delta\varepsilon_{yy}^{(1)} &= -\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial y^2} \\
\delta\gamma_{xy}^{(0)} &= \frac{\partial\delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial\delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial\delta w_0}{\partial y}, & \delta\gamma_{xy}^{(1)} &= -2\frac{\partial^2\delta w_0}{\partial x\partial y}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Замесвайки виртуалните деформации от ур. (2.16) в ур. (2.10), интегрирайки по части в Ω_0 и приравнявайки на виртуалните премествания на нула при $t = 0$ и $t = T$ получаваме

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \left\{ \int_{\Omega_0} \left[-N_{xx,x}\delta u_0 - \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,x} \delta w_0 - M_{xx,xx}\delta w_0 - N_{yy,y}\delta v_0 - \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,y} \delta w_0 \right. \right. \\
&\quad - M_{yy,yy}\delta w_0 - N_{xy,y}\delta u_0 - N_{xy,x}\delta v_0 - \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,x} \delta w_0 - \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,y} \delta w_0 - 2M_{xy,xy}\delta w_0 - q\delta w_0 \\
&\quad + I_0(\ddot{u}_0\delta u_0 + \ddot{v}_0\delta v_0 + \ddot{w}_0\delta w_0) + I_1 \left(\frac{\partial\ddot{u}_0}{\partial x}\delta w_0 - \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}\delta u_0 + \frac{\partial\ddot{v}_0}{\partial y}\delta w_0 - \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}\delta v_0 \right) \Big] dx dy \\
&\quad - I_2 \left(\frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 + \oint_{\Gamma} \left[N_{xx}n_x\delta u_0 + \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) n_x\delta w_0 - M_{xx}n_x \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} + M_{xx,x}n_x\delta w_0 \right. \\
&\quad + N_{yy}n_y\delta v_0 + \left(N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y\delta w_0 - M_{yy}n_y \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} + M_{yy,y}n_y\delta w_0 - M_{xy}n_x \frac{\partial\delta w_0}{\partial y} + M_{xy,x}n_y\delta w_0 \\
&\quad \left. - M_{xy}n_y \frac{\partial\delta w_0}{\partial x} + M_{xy,y}n_x\delta w_0 + N_{xy}n_y\delta u_0 + N_{xy}n_x\delta v_0 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} n_x\delta w_0 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} n_y\delta w_0 \right] ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn}\delta u_{0n} + \hat{N}_{ns}\delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial\delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial\delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n\delta w_0 \right) ds - \int_{\Gamma_\sigma} \left(\hat{N}_{nn}\delta u_{0n} + \hat{N}_{ns}\delta u_{0s} \right. \\
&\quad \left. - \hat{M}_{nn} \frac{\partial\delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial\delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n\delta w_0 \right) ds + \oint_{\Gamma} \left[-I_1(\ddot{u}_0n_x + \ddot{v}_0n_y) + I_2 \left(\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}n_x + \frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}n_y \right) \right] \delta w_0 ds \Big\} dt
\end{aligned}$$

Събираме коефициентите при всяка от виртуалните деформации $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ заедно, отчитаме, че виртуалните премествания са нула върху Γ_σ , и полагаме поотделно на нула коефициентите пред $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0$ върху Ω_0 . Така получаваме уравненията на Ойлер-Лгранж

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
\delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
\delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \mathcal{N}(w_0) + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\
& - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Членовете, включващи I_2 се наричат членове на *ротационна* инерция и в огромната част от литературата се пропускат. Те могат да доведат до вибрации или честоти от по-висока степен.

Следващата стъпка е да получим граничните условия за теорията от ур. (2.17). За да намерим коефициентите на виртуалните премествания и техните производни върху границата, изразяваме $\delta u_0, \delta v_0$ чрез $\delta u_{0n}, \delta v_{0n}$. За единичен вектор на външната нормала \hat{n} , завъртян на ъгъл θ от x -оста, посочните косинуси са $n_x = \cos \theta$ и $n_y = \sin \theta$. Тогава трансформацията от координатната система (n, s, r) в (x, y, z) се дава с изразите

$$\begin{aligned}\hat{e}_x &= \cos \theta \hat{e}_n - \sin \theta \hat{e}_s \\ \hat{e}_y &= \sin \theta \hat{e}_n + \cos \theta \hat{e}_s \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_r\end{aligned}\tag{2.19}$$

Следователно преместванията u_{0n}, u_{0s} се изразяват чрез u_0, v_0

$$u_0 = n_x u_{0n} - n_y u_{0s}, \quad v_0 = n_y u_{0n} + n_x u_{0s}\tag{2.20a}$$

Аналогично, нормалните и тангенциалните производни $w_{0,n}, w_{0,s}$ се изразяват чрез $w_{0,x}, w_{0,y}$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = n_x \frac{\partial w_0}{\partial n} - n_y \frac{\partial w_0}{\partial s}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = n_y \frac{\partial w_0}{\partial n} + n_x \frac{\partial w_0}{\partial s}\tag{2.20b}$$

За граничните изрази изразени чрез (u_{0n}, u_{0s}) и $(w_{0,n}, w_{0,s})$ имаме

$$\begin{aligned}&(N_{xx}n_x + N_{xy}n_y) \delta u_0 + (N_{xy}n_x + N_{yy}n_y) \delta v_0 \\ &= (N_{xx}n_x + N_{xy}n_y) (n_x \delta u_n - n_y \delta u_s) + (N_{xy}n_x + N_{yy}n_y) (n_y \delta u_n + n_x \delta u_s) \\ &= (N_{xx}n_x^2 + 2N_{xy}n_xn_y + N_{yy}n_y^2) \delta u_n + [(N_{yy} - N_{xx})n_xn_y + N_{xy}(n_x^2 - n_y^2)] \delta u_s\end{aligned}\tag{2.21}$$

Коефициентите пред δu_{0n} и δu_{0s} в дясната част на израза са равни на N_{nn} и N_{ns} , защото от ур. (1.41) имаме

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_xn_y \\ -n_xn_y & n_xn_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{ns} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_xn_y \\ -n_xn_y & n_xn_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_xn_y \\ -n_xn_y & n_xn_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Тогава граничните интегрални в ур. (2.17) могат да се напишат във форма

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^T \int_{\Gamma_s} & \left[(N_{nn} - \hat{N}_{nn}) \delta u_{0n} + (N_{ns} - \hat{N}_{ns}) \delta u_{0s} \right. \\
& + \left(M_{xx,x} n_x + M_{xy,y} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + P(w_0) \right. \\
& \left. - I_1 \ddot{u}_0 n_x - I_1 \ddot{v}_0 n_y + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y - \hat{Q}_n \right) \delta w_0 \\
& \left. - (M_{nn} - \hat{M}_{nn}) \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - (M_{ns} - \hat{M}_{ns}) \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right] ds dt
\end{aligned} \tag{2.22}$$

и върху Γ_u граничните условия приемат вида

$$\begin{aligned}
N_{nn} - \hat{N}_{nn} = 0, \quad N_{ns} - \hat{N}_{ns} = 0, \quad Q_n - \hat{Q}_n = 0 \\
M_{nn} - \hat{M}_{nn} = 0, \quad M_{ns} - \hat{M}_{ns} = 0
\end{aligned} \tag{2.23}$$

където

$$\begin{aligned}
Q_n \equiv & \left(M_{xx,x} + M_{xy,y} - I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) n_x + \\
& \left(M_{yy,y} + M_{xy,x} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) n_y + P(w_0)
\end{aligned}$$

При настоящите разглеждания

$$\begin{aligned}
\text{обобщени премествания са: } u_n, u_s, w_0, \frac{\partial w_0}{\partial n}, \frac{\partial w_0}{\partial s} \\
\text{обобщени сили са: } N_{nn}, N_{ns}, Q_n, M_{nn}, M_{ns}
\end{aligned}$$

Обобщените премествания са определени върху Γ_u

Ур. (2.18) са диференциални уравнения от осми ред. С други думи, ако уравненията се изразят чрез преместванията (u_0, v_0, w_0) , те ще съдържат пространствени производни от втори ред на u_0 и v_0 , и пространствена производна от четвърти ред на w_0 . Следователно граничните условия трябва да бъдат само осем, докато ур. (2.23) определя пет геометрични и пет натурални гранични условия. За да отстраним това несъответствие, интегрираме по части членът на тангенциалната производна с цел да получим граничен член

$$- \oint_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} ds = \oint_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w_0 ds - [M_{ns} \delta w_0]_{\Gamma} \tag{2.24a}$$

$[M_{ns}, \delta w_0]_{\Gamma} = 0$, защото кривата е затворена. Този член трябва да се добави към Q_n като коефициент на δw_0

$$V_n \equiv Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{2.24b}$$

който трябва да се уравнива чрез приложената сила \hat{Q}_n . Това гранично условие $V_n = \hat{Q}_n$ е известно като условие на *Кирхоф* за свободния край. Граничните условия в класическата теория на композитни плочи са

$$\begin{aligned} u_n, u_s, w_0, \frac{\partial w_0}{\partial n} & \quad (\text{съществени}) \\ N_{nn}, N_{ns}, V_n, M_{nn} & \quad (\text{естествени}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Началните условия включват определянето на стойностите на преместванията и техните първи производни в момента $t = 0$.

$$\begin{aligned} u_n = u_n^0, u_s = u_s^0, w_0 = w_0^0 \\ \dot{u}_n = \dot{u}_n^0, \dot{u}_s = \dot{u}_s^0, \dot{w}_0 = \dot{w}_0^0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

където горният индекс означава стойност при $t = 0$.

Така класическата теория на композитни слоеви плочи за *динамичен анализ* е напълно определена. Като специален случай, от ур. (2.18) могат да се получат уравненията на равновесие като всички членове, съдържащи производни по времето, се приравнят на нула. За линеен анализ, освен нелинейните членове в уравненията за деформациите и преместванията, на нула се приравняват също и $N(w_0)$ и $P(w_0)$. Ще отбележим, че при получаването на ур. (2.18) на движението не се използват конструктивните уравнения, затова те са приложими и при линейно и при нелинейно еластични тела.

2.2.5. Конструктивни уравнения на композита

Конструктивните уравнения, които ще бъдат изведени в този параграф свързват резултантите на силите и моментите в ур. (2.16) с деформациите на един композит. Тук предполагаме, че всеки слой е ортотропен, и че се подчинява на закона на Хук, т.е. за k -тия слой е в сила ур.(2.12а). Разглеждаме случая, в който не се отчитат температурните и пиезоелектрическите ефекти. Въпреки че деформациите са непрекъснати по дебелината, напрежения не са, поради изменението на материални коефициенти по протежение на дебелината (т.е. всеки слой). И така, интегрирането на напрежения по дебелината на композита изисква интегриране, базирано на отделния слой. Резултантите на силите са дадени като

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} dz \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27a)$$

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} + z\varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} + z\gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} z \, dz \\
&= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.276}$$

където A_{ij} са коравини на опън, D_{ij} са коравините на огъване, B_{ij} са коравини на съвместно огъване и опън, и те са определени чрез коравините $\hat{Q}_{ij}^{(k)}$ на слоевете като

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \tag{2.28a}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1} - z_k), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1}^2 - z_k^2), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1}^3 - z_k^3) \tag{2.286}$$

Величините $Q_{ij}, A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$, изобщо са функции на позицията (x, u) . В изследванията по нататък в този труд се използва дискретния случай ур. (2.286).

Когато случаят не е изотермален, конструктивните уравнения (2.27a) – (2.276) на композита приемат матричния вид

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^T\} \\ \{M^T\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{N^P\} \\ \{M^P\} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

където $\{M^T\}$ и $\{N^T\}$ са резултатите на термалните сили, а $\{M^P\}$ и $\{N^P\}$ са пиезоелектрическите резултанти

$$\{N^P\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}]^{(k)} \{E\}^{(k)} dz, \quad \{M^P\} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [\bar{e}]^{(k)} \{E\}^{(k)} z dz \tag{2.30}$$

2.2.6. Уравнения на движението за преместванията

Резултантите на напрежението са свързани с градиентите на преместването, температурното изменение и електрическото поле. Когато отсъстват температурни и електрически ефекти, резултатите на силите и моментите могат да се изразят чрез преместванията (u_0, v_0, w_0) със съотношенията като заместим ур. (2.10) в ур. (2.27a)-(2.27 б)

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{2.32}$$

Кат заместим резултантите на силите и моментите от ур. (2.31) и (2.32) в ур. (2.18), получаваме уравненията на движенията чрез преместванията u_0, v_0, w_0 .

$$\begin{aligned}
& A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& - B_{18} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
& - \left(\frac{\partial N_{xx}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.33a}$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - 2B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
& - \left(\frac{\partial N_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^T}{\partial y} \right) = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.33b}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\
& + 2B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2B_{26} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right. \\
& \left. + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + B_{22} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) \\
& - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + \mathcal{N}(w_0) + q \\
& - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^T}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2} \right) \\
& = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.33в}$$

Ние ще опростим нелинейната част на ур. (2.33), тъй като се ориентираме към линеен анализ, и защото някои от коравините (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) са нула. След като се намерят преместванията като се решат ур. (2.33), аналитично или числено, деформациите и напреженията на всеки слой могат да се пресметнат от уравнения (2.10) и (2.12).

2.3. Коравини при специални композити

2.3.1. Едно-слоести плочи

Тук разглеждаме някои специални случаи на едно-слоести конфигурации и техните коравини, които се използват при изследванията в този труд. Коэффициентите на едновременно огъване и разтягане B_{ij} и срязващите коравини $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}$ могат да станат нула за всички едно-слоести композитни плочи с изключение на обобщено ортотропните и анизотропните.

Единичен изотропен слой с материални константи E и ν ($G = \frac{E}{2(1+\nu)}$) и дебелина h , има следните ненулеви коравини на ламината от ур. (2.28)

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}, \quad A_{22} = A_{11} \\ A_{66} &= \frac{1-\nu}{2} A_{11}, \quad A_{44} = A_{55} = \frac{1-\nu}{2} K A_{11} \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{12} = \nu D_{11}, \quad D_{22} = D_{11}, \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Конструктивните уравнения се редуцират в

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \nu A_{11} & 0 \\ \nu A_{11} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & \nu D_{11} & 0 \\ \nu D_{11} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} &= K \frac{1-\nu}{2} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ненулевите резултанти на термалните напрежения $\{N^T\}$ и $\{M^T\}$ се даят с изразите

$$N_{xx}^T = N_{yy}^T = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T dz, \quad M_{xx}^T = M_{yy}^T = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T z dz \quad (2.36)$$

За Единичен специално ортотропен слой, коравините могат да се изразят чрез Q_{ij} и дебелината h . Ненулевите коравини в ур. (2.28) стават

$$\begin{aligned} A_{11} &= Q_{11}h, \quad A_{12} = Q_{12}h, \quad A_{22} = Q_{22}h \\ A_{66} &= Q_{66}h, \quad A_{44} = KQ_{44}h, \quad A_{55} = KQ_{55}h \\ D_{11} &= \frac{Q_{11}h^3}{12}, \quad D_{12} = \frac{Q_{12}h^3}{12}, \quad D_{22} = \frac{Q_{22}h^3}{12}, \quad D_{66} = \frac{Q_{66}h^3}{12} \end{aligned} \quad (2.37)$$

където Q_{ij} са редуцираните коравини при равнинни напрежения, които изразени чрез механичните константи ур. (1.51б) имат вида

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12}, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Конструктивните уравнения за плочата приемат вида

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = h \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{cases} \\
\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{cases} \\
\begin{cases} Q_y \\ Q_x \end{cases} = Kh \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{cases}
\end{cases} \quad (2.39)$$

Ненулевите резултанти на термалните напрежения $\{N^T\}$ и $\{M^T\}$ се даят с изразите

$$\begin{cases} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T dz \\
\begin{cases} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \end{cases} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Delta T z dz
\end{cases} \quad (2.40)$$

За **единичен обобщено ортотропен слой** (т.е. главните материални координати не съвпадат с тези на плочата), коравините могат да се изразят чрез трансформираните коефициенти \hat{Q}_{ij} и дебелината h . Ненулевите коравини са ($B_{ij} = 0$)

$$A_{ij} = \bar{Q}_{ij}h, \quad D_{ij} = \frac{\bar{Q}_{ij}h^3}{12}, \quad A_{44} = Kh\bar{Q}_{44}, \quad A_{55} = Kh\bar{Q}_{55} \quad (2.41)$$

Конструктивните уравнения за плочата са

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{cases} \\
\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{cases} \\
\begin{cases} Q_y \\ Q_x \end{cases} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{cases}
\end{cases} \quad (2.42)$$

При температурно изменение, линейно по дебелината на слоя $\Delta T = T_0 + zT_1$, резултантите от термалното напрежение имат вида

$$\begin{cases} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \\ N_{xy}^T \end{cases} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{cases} T_0 h \\
\begin{cases} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \\ M_{xy}^T \end{cases} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \\ 2\alpha_{xy} \end{cases} \frac{T_1 h^3}{12}
\end{cases} \quad (2.43)$$

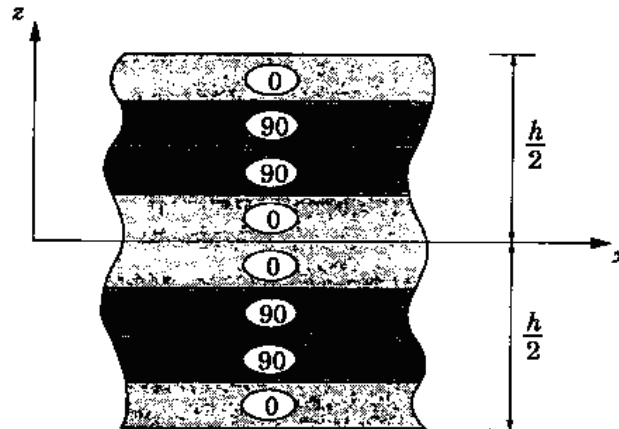
При **единичен анизотропен слой** ненулевите коравини, изразени чрез $C_{ij} h$, са ($B_{ij} = 0$)

$$A_{ij} = C_{ij} h, \quad D_{ij} = \frac{C_{ij} h^3}{12} \quad (2.44)$$

за $i, j = 1 \div 6$ ур. (1.13). Конструктивните уравнения за плоча са същите като в ур. (2.42)-(2.43) с коравини на плочата. (2.44).

2.3.2. Симетрични многослоести плочи

Когато материалните свойства, местоположението и схемата на разположение на слоевете са симетрични относно средната равнина, имаме работа със **симетрични композити**. Поради симетрията на материалните коефициенти $\hat{Q}_{ij}^{(k)}$, на разстоянията z_j и дебелините h_k на всеки пласт относно средната равнина на композита, в този случай обединените коравини B_{ij} са нула (Фиг.2.4). Елиминирането на обединяването на огъване и опън опростява управляващите уравнения. При симетрични композити, в случаите на линейни уравнения за деформациите и напреженията, уравненията за деформациите вътре в равнината могат да бъдат отделени от уравненията за огъване. Освен това, ако няма приложени вътрешно равнинни сили или премествания, вътрешно равнинната деформация е нула, и остават само уравненията за огъване.



Фигура 2.4. Симетричен ламинат с кръстосани пластове

Резултантите на моментите и силите за симетричен композит, като цяло, имат същата форма както при обобщено ортотропните едно-слоести плочи. ур. (2.42). За някои специални класове от симетрични композити, съотношенията между деформации и резултанти могат да бъдат допълнително опростени.

Симетрични композити с изотропни слоеве. Когато изотропни слоеве с възможно различни материални свойства и дебелини са подредени симетрично от гледна точка на геометрията и материалните свойства, полученият композит ще има следните конструктивни уравнения.

$$\begin{cases} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{cases} \\
\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{cases} \\
\begin{cases} Q_y \\ Q_x \end{cases} = K \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{zx}^{(0)} \end{cases}
\end{cases} \quad (2.45)$$

Коравините на композита A_{ij} и D_{ij} се определят с ур. (2.28)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} = \bar{Q}_{22}^{(k)} &= \frac{E^k}{1 - \nu_k^2}, \quad \bar{Q}_{16}^{(k)} = \bar{Q}_{26}^{(k)} = 0 \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_k E^k}{1 - \nu_k^2}, \quad \bar{Q}_{44}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} = \bar{Q}_{66}^{(k)} = \frac{E^k}{2(1 + \nu_k)}
\end{aligned}$$

(2.46) Резултантата от термални напрежения за $\Delta T = T_0 + zT_1$ в този случай е:

$$\begin{cases} N_{xx}^T \\ N_{yy}^T \end{cases} = T_0 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \end{cases}, \quad \begin{cases} M_{xx}^T \\ M_{yy}^T \end{cases} = T_1 \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yy} \end{cases}
\end{cases} \quad (2.47)$$

и аналогично за $\{M^T\}$.

Симетрични композити със специално ортотропни слоеве, които са симетрично разположени от гледна точка на геометрични и материални константи относно средната равнина на композита, не проявяват обединяване на огъване и опън т.е. $B_{ij} = 0$. Конструктивните уравнения за такъв композит се дават с ур. (2.45), където коравините на композита A_{ij} и D_{ij} се определят с ур. (2.28) с

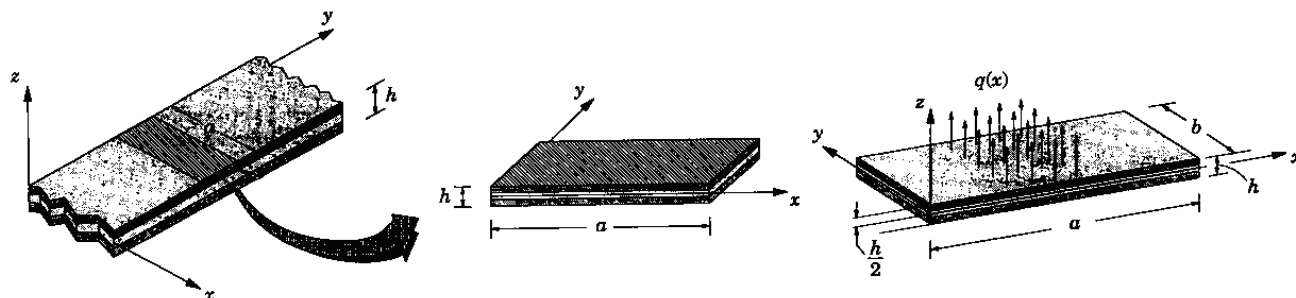
$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad \bar{Q}_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{21}^k E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad \bar{Q}_{22}^{(k)} = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} &= 0, \quad \bar{Q}_{26}^{(k)} = 0, \quad \bar{Q}_{66}^{(k)} = G_{12}^k, \quad \bar{Q}_{44}^{(k)} = G_{23}^k, \quad \bar{Q}_{55}^{(k)} = G_{13}^k
\end{aligned} \quad (2.48)$$

Резултантите от термално напрежения се описват с ур. (2.47).

3. ЕДНОМЕРЕН АНАЛИЗ НА СЛОЕСТИ ГРЕДИ

3.1. Въведение

Съществуват два случая на композитни слоеви плочи, които могат да се разглеждат като едномерни задачи: (1) слоеви греди, и (2) цилиндрично огъване на композитни шини. В тази работа ще се спрем на композитни греди. Когато дебелината b (т.е. размерът по y -оста) на слоеста плоча е много малък в сравнение с дължината му по x -оста, тя се разглежда като композитна греда (Фиг.3.1). При задачата за греда се разглеждат равнинни напрежения.



Фигура 3.1. Геометрия на слоеста плоча

В тази част на работата се извеждат **точни аналитични решения** на два класа задачи. Точно решение на задача е математическо решение, което удовлетворява управляващите уравнения във всяка точка на областта и граничните и началните условия на задачата. Числено решение е онова, което се получава чрез удовлетворяване на управляващите уравнения и граничните условия на задачата в приближен смисъл. Решенията, получени с произволен числен метод, като метода на крайните елементи, се наричат числени решения. Точното решение може да бъде или аналитично или във форма на безкрайни редове. Аналитичните решения се изразяват чрез краен брой членове или във форма на сходящи редове

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \quad (3.1)$$

Тези решения в действителност се оценяват само за краен брой от членовете им, т.е. приближено. В приближен смисъл точно решение може да се нарече и крайната сума

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin n\pi x \quad (3.2)$$

В едномерния случай могат да бъдат построени аналитични решения (точни и числени) за редица композитни греди. Представените тук аналитични решения за опростени задачи служат като основа за разбиране на реакцията им. В допълнение, резултатите служат за сравнение с числени методи, създадени за анализиране на по-сложните задачи.

3.2. Управляващи уравнения

Тук разглеждаме огъване на симетрична слоеста греда с класическата теория на слоести плочи КТСП. За симетрични композити уравненията за огъващите отмествания са независими от уравненията за премествания на опън. Ако вътрешно равнинните сили са нула, вътрешно равнинните премествания u_0, v_0 са нула, и задачата се редуцира до задача за решаване на огъващите отмествания и напрежения.

При разглеждане на композитна греда ние приемаме, че

$$M_{yy} = M_{xy} = 0 \quad (3.3)$$

навсякъде в гредата. Конструктивните уравнения в КТСП за симетрични композити, при отсъствие на вътрешно равнинни сили, се дават с ур. (2.32)

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.4a)$$

или обратно

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.46)където $[D_{ij}^*] = [D_{ij}]^{-1}$. От ур. (3.3) имаме

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx}, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = -D_{12}^* M_{xx}, \quad 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = -D_{16}^* M_{xx} \quad (3.5a)$$

където

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= (D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26}) / D^* \\ D_{12}^* &= (D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}) / D^* \\ D_{16}^* &= (D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16}) / D^* \\ D^* &= D_{11}D_1 + D_{12}D_2 + D_{16}D_3, \quad D_1 = D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26} \\ D_2 &= D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}, \quad D_3 = D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16} \end{aligned} \quad (3.5b)$$

Ур. (3.5) показват, че напречното преместване w_0 зависи от координатата y поради ефекта на Поасон D_{12}^* и анизотропния сръзващ ефект D_{16}^* . Тези ефекти могат да бъдат пренебрегнати само за много дълги греди, т.е. голямо отношение дължина към дебелина. В последния случай самото отношение зависи е функция на схемата на композита.

В настоящото решение ние приемаме, че композитната греда е достатъчно дълга и ефектите от коефициента на Поасон и комбинирано сръзване са пренебрежими. Тогава напречното отместване може да се разглежда като функция на координатата x (по дължината на гредата) и на времето t .

$$w_0 = w_0(x, t), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx} \quad (3.6)$$

За да препишем ур. (3.6) като познатото уравнение на Ойлер-Бернули, въвеждаме величините

$$M = bM_{xx}, \quad Q = bQ_x, \quad E_{xx}^b = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} = \frac{b}{I_{yy} D_{11}^*}, \quad I_{yy} = \frac{bh^3}{12}$$

и получаваме

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{M}{E_{xx}^b I_{yy}}, \quad Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \quad (3.7)$$

(b е ширината, а h е цялата дебелина на композитната греда).

Уравнението на движението на композитна греда може да се получи от ур. (2.18) като положим всички членове, съдържащи производни по y равни на нула:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + b \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{q} = \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \hat{I}_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (3.8)$$

където \hat{N}_{xx} е приложеното осово натоварване, и

$$\hat{q} = bq, \quad \hat{I}_0 = bI_0, \quad \hat{I}_2 = bI_2, \quad I_i = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z)^i dz \quad (i = 0, 1, 2)$$

Граничните условия се дават във форма

$$\begin{aligned} \text{Геометрични :} & \quad \text{дадени} \quad w_0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \text{за силата :} & \quad \text{дадени} \quad Q \equiv \frac{\partial M}{\partial x}, \quad M \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения (3.7) – (3.9) по форма съвпадат с уравненията на Ойлер-Бернули за хомогенни изотропни греди. Така, решенията за отмествания на изотропни греди при различни гранични условия могат лесно да се използват за композитни греди чрез заместване на модула E с E_{xx}^b и умножавайки натоварването и инерциите с b . Ротационната инерция I_2 в ур. (3.8) не може да бъде пренебрегната.

3.3. Огъване

За статично огъване без осови сили, $\hat{N}_{xx} = \mathbf{0}$, ур. (3.7) и (3.8) приемат вида

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M}{E_{xx}^b I_{yy}}, \quad E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 w_0}{dx^4} = \hat{q} \quad (3.10)$$

където $\hat{q} = bq$. Първото уравнение е най-удобно в случаите, когато огъващият момент M може да се изрази чрез приложеното натоварване. За неопределени греди второто уравнение е по-удобно.

Общото решение на ур. (3.10) се получава чрез непосредствено интегриране.

$$\begin{aligned} E_{xx}^b I_{yy} w_0(x) &= -\int^x \left[\int^\eta M(\xi) d\xi \right] d\eta + b_1 x + b_2 \\ &= \int^x \left\{ \int^\xi \left[\int^\eta \left(\int^\zeta \hat{q}(\mu) d\mu \right) d\zeta \right] d\eta \right\} d\xi + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Интеграционните константи $b_1, b_2, c_1, \dots, c_4$ се определят от граничните условия на задачата. Тези гранични условия за различни видове закрепвания се определят както следва

$$\begin{aligned} \text{Свободен край :} \quad Q &\equiv \frac{dM}{dx} = 0, \quad M = 0 \\ \text{Шарнир :} \quad w_0 &= 0, \quad M = 0 \\ \text{Запънат край :} \quad w_0 &= 0, \quad \frac{dw_0}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (3.11b)$$

Вътрешно равнинните напрежения в k -тия слой могат да се пресметнат от ур. (2.12a) и (3.46)

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} &= z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{z}{b} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12a)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)}(x, z) &= \frac{M(x)z}{b} \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^{(k)} D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^{(k)} D_{16}^* \right) \\ \sigma_{yy}^{(k)}(x, z) &= \frac{M(x)z}{b} \left(\bar{Q}_{12}^{(k)} D_{11}^* + \bar{Q}_{22}^{(k)} D_{12}^* + \bar{Q}_{26}^{(k)} D_{16}^* \right) \\ \sigma_{xy}^{(k)}(x, z) &= \frac{M(x)z}{b} \left(\bar{Q}_{16}^{(k)} D_{11}^* + \bar{Q}_{26}^{(k)} D_{12}^* + \bar{Q}_{66}^{(k)} D_{16}^* \right) \end{aligned} \quad (3.12b)$$

В класическата теория на греди напреженията σ_{zz}, σ_{xz} между слоевете (интерламинарни) са идентично нула, когато при пресмятане се използват конструктивните уравнения. Но тези напрежения съществуват реално и могат да бъдат причина за повреди в слоестите композити поради тяхната не висока напречна и на срязване здравина .

Напреженията между слоевете могат да бъдат пресметнати от уравненията на движението за тримерна еластичност ур. (1.23б) при равновесие:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.13)$$

За всеки слой тези уравнения могат да се интегрират по съответната дебелина z , за да се получат напреженията вътре във всеки слой ($z_k \leq z \leq z_{k+1}$):

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + G^{(k)} \\ \sigma_{yz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + F^{(k)} \\ \sigma_{zz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + H^{(k)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

където $\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}$ са известни от ур. (3.12) и $G^{(k)}, F^{(k)}, H^{(k)}$ са константи, които се намират от граничните условия и условията за непрекъснатост на прилепените повърхности на отделните слоеве. В различните слоеве σ_{xz} и σ_{zz} се описват с различни функции, но те са непрекъснати по слоевете. За първия слой константите трябва да са такива, че σ_{xz} и σ_{zz} да са равни на срязващото и нормалното напрежения на външната повърхнина на най-долния слой на композита.

$$\sigma_{xz}^{(k)}(x, z_{k+1}) = \sigma_{xz}^{(k+1)}(x, z_{k+1}), \quad \sigma_{zz}^{(k)}(x, z_{k+1}) = \sigma_{zz}^{(k+1)}(x, z_{k+1})$$

Това дава

$$\begin{aligned} G^{(k+1)} &= -Q_x(x) \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^{(k)} D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^{(k)} D_{16}^* \right) \left(\frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} \right) + G^{(k)} \\ &= \sigma_{xz}^{(k)}(x, z_{k+1}) \\ H^{(k+1)} &= -\frac{dQ_x}{dx} \left(\bar{Q}_{11}^{(k)} D_{11}^* + \bar{Q}_{12}^{(k)} D_{12}^* + \bar{Q}_{16}^{(k)} D_{16}^* \right) \left(\frac{z_{k+1}^3 - z_k^3}{6} \right) + H^{(k)} \\ &= \sigma_{zz}^{(k)}(x, z_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.4. Вибрации

За натурални вибрации, решението се предполага периодично

$$w_0(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (3.16)$$

Когато отсъства приложено напречно натоварване q , управляващите уравнения (3.8) се редуцират в

$$E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 W}{dx^4} - b \hat{N}_{xx} \frac{d^2 W}{dx^2} = \omega^2 \hat{I}_0 W - \omega^2 \hat{I}_2 \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (3.17)$$

Ур. (3.17) може да се препише във вида:

$$\begin{aligned} p \frac{d^4 W}{dx^4} + q \frac{d^2 W}{dx^2} - r W &= 0 \\ p = E_{xx}^b I_{yy}, \quad q = \omega^2 \hat{I}_2 - b \hat{N}_{xx}, \quad r = \omega^2 \hat{I}_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Общото решение на ур. (3.18) е

$$\begin{aligned} W(x) &= c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sinh \mu x + c_4 \cosh \mu x \\ \lambda &= \sqrt{\frac{1}{2p} \left(q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2p} \left(-q + \sqrt{q^2 + 4pr} \right)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Константите c_1, c_2, c_3, c_4 се определят от граничните условия. От ур. (3.19) имаме

$$\begin{aligned} (2p\lambda^2 - q)^2 &= q^2 + 4pr \quad \text{or} \quad p\lambda^4 - q\lambda^2 - r = 0 \\ (2p\mu^2 + q)^2 &= q^2 + 4pr \quad \text{or} \quad p\mu^4 + q\mu^2 - r = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Заместваме p, q, r от ур. (3.18) в ур. (3.20) и решаваме относно ω^2

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \lambda^4 \left(\frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0} \right) \left(\frac{1 + P_1}{1 + R_1} \right), \quad P_1 = \frac{b \hat{N}_{xx}}{E_{xx}^b I_{yy} \lambda^2}, \quad R_1 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0} \lambda^2 \\ \omega^2 &= \mu^4 \left(\frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0} \right) \left(\frac{1 - P_2}{1 - R_2} \right), \quad P_2 = \frac{b \hat{N}_{xx}}{E_{xx}^b I_{yy} \mu^2}, \quad R_2 = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0} \mu^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Двата израза са еквивалентни. Когато осовото натоварване е нула, честотата на вибрациите може да се пресметне по формулата:

$$\omega^2 = \lambda^4 \frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0} \left(1 - \frac{\hat{I}_2 \lambda^2}{\hat{I}_0 + \hat{I}_2 \lambda^2} \right) = \mu^4 \frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0} \left(1 + \frac{\hat{I}_2 \mu^2}{\hat{I}_0 - \hat{I}_2 \mu^2} \right) \quad (3.22)$$

Ротационната инерция намалява честотата на натуралната вибрация. Ако тя се пренебрегне, имаме случая $\mu = \nu$ и

$$\omega = \lambda^2 a_0, \quad a_0 = \sqrt{\frac{E_{xx}^b I_{yy}}{\hat{I}_0}}.$$

3.5. Композитна греда на Тимошенко

3.5.1. Управляващи уравнения.

На първо място ще отбележим, че класическата теория на плочите може да се получи от теорията от първи ред като в ур. (2.4) се положи

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.23)$$

В този параграф ще разгледаме частен случай на ТДПР, приложена за композитни греди. В този случай ТДПР е известна като теория на Тимошенко за греди.

За симетрично разположени слоеве и при отсъствие на вътрешно равнинни сили, конструктивните уравнения на композита се дават с уравненията.

$$\begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_y \\ Q_x \end{cases} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases} \quad (3.24)$$

или обрнато

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{cases} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{cases} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} A_{44}^* & A_{45}^* \\ A_{45}^* & A_{55}^* \end{bmatrix} \begin{cases} Q_y \\ Q_x \end{cases} \quad (3.25)$$

където K е коефициентът на корекция при срязване, $D_{ij}^*, (i,j=1,2,6)$ са елементи на $[D]^{-1}$, и $A_{ij}^*, (i,j=4,5)$ са елементи на $[A]^{-1}$:

$$A_{44}^* = \frac{A_{55}}{A}, \quad A_{55}^* = \frac{A_{44}}{A}, \quad A_{45}^* = -\frac{A_{45}}{A}, \quad A = A_{44}A_{55} - A_{45}A_{45} \quad (3.26)$$

Както при класическата теория на плочите, приложена за греди, и тук предполагаме, че $M_{yy} = M_{xy} = Q_y = \phi_y = 0$, и че w_0 и ϕ_x са функции само на x и t .

$$w_0 = w_0(x, t), \quad \phi_x = \phi_x(x, t) \quad (3.27)$$

Преместванията и деформациите приемат вида (когато вътрешно равнинните премествания u_0 и v_0 са нула)

$$\begin{aligned} u(x, z) &= z\phi_x(x), \quad w(x, z) = w_0(x) \\ \varepsilon_{xx} &= z\frac{\partial\phi_x}{\partial x}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{aligned} \quad (3.28)$$

От ур. (3.25) имаме

$$\frac{\partial\phi_x}{\partial x} = D_{11}^* M_{xx}, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x = \frac{A_{55}^*}{K} Q_x \quad (3.29)$$

или

$$\begin{aligned} E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial\phi_x}{\partial x} &= M(x), \quad M(x) = bM_{xx}, \quad E_{xx}^b = \frac{12}{D_{11}^* h^3} \\ KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= Q(x), \quad Q(x) = bQ_x, \quad G_{xz}^b = \frac{1}{A_{55}^* h} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Уравненията на движенията имат вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + q &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Прилагайки ур. (2.20) в ур. (3.31), получаваме уравненията на движение във вида

$$\begin{aligned} KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial\phi_x}{\partial x} \right) + b\hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{q} &= \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) &= \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \hat{q} = bq, \quad \hat{I}_0 = bI_0, \quad \hat{I}_2 = bI_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.5.2 Огъване

В случаите, когато в задачата за слоеста греда огъващият момент $M(x)$ и $Q(x)$ могат да бъдат изписани чрез известни прилагани сили (както в задачите за статически определена греда), ур. (3.31) може да бъде използвано за определяне на ϕ_x и w_0 . Когато $M(x)$ и $Q(x)$ не могат да бъдат изразени като известни натоварвания, се използва ур. (3.32), за да се определят $w_0(x)$ и $\phi_x(x)$.

При огъване ур. (3.31) се редуцират в

$$\begin{aligned} KG_{xz}^b bh \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d\phi_x}{dx} \right) + \hat{q} &= 0 \\ E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^2 \phi_x}{dx^2} - KG_{xz}^b bh \left(\frac{dw_0}{dx} + \phi_x \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Интегрирайки първото от тези уравнения по x , замествайки резултата заместваме във второто от уравненията и интегрираме по x , получаваме

$$E_{xx}^b I_{yy} \phi_x(x) = - \int^x \int^\zeta \int^\eta \hat{q}(\xi) d\xi d\eta d\zeta + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (3.34)$$

В ур. (3.33) заместваме получения израз за ϕ_z ур. (3.34) интегрираме и стигаем до израза

$$w_0(x) = - \frac{1}{E_{xx}^b I_{yy}} \left[- \int^x \int^\zeta \int^\eta \int^\mu \hat{q}(\zeta) d\zeta d\mu d\eta d\xi + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right] + \frac{1}{KG_{xz}^b bh} \left[- \int^x \int^\zeta \hat{q}(\zeta) d\zeta d\xi + c_1 x \right] \quad (3.35)$$

където интеграционните константи c_1, \dots, c_4 се определят от граничните условия. От ур. (3.35) става ясно, че напречното отместване при греда на Тимошенко се състои от две части - чисто огъване и напречно срязване:

$$w_0(x) = w_0^b(x) + w_0^s(x) \\ w_0^b(x) = \frac{1}{E_{xx}^b I_{yy}} \left[\int^x \int^\zeta \int^\eta \int^\mu \hat{q}(\zeta) d\zeta d\mu d\eta d\xi - c_1 \frac{x^3}{6} - c_2 \frac{x^2}{2} - c_3 x - c_4 \right] \\ w_0^s(x) = \frac{1}{KG_{xz}^b bh} \left[- \int^x \int^\zeta \hat{q}(\zeta) d\zeta d\xi + c_1 x \right] \quad (3.36)$$

Отместването при чисто огъване $w_0^b(x)$ е същото, както беше получено в класическата теория на гредите ур. (3.11). Когато напречното срязващо напрежение е безкрайно, срязващото отместване $w_0^s(x)$ клони към нула, и решението за греда на Тимошенко се редуцира до това на класическата теория за греди. В действителност, могат да се получат точните съотношения между решенията за греда на Ойлер-Бернули и греда на Тимошенко. Тези съотношения позволяват решенията за греда на Тимошенко да бъдат получавани от класическата теория за греди при произволна комбинация на гранични условия.

Изразите за вътрешно равнинните напрежения при греда на Тимошенко остават същите както при класическата теория на греди ур. (3.12). Изразите в ур. (3.14) за напречните срязващи напрежения, получени от тримерния случай на равновесие, остават в сила и тук.

Напечното срязващо напрежение може да бъде пресметнато и чрез конструктивното уравнение в теорията на Тимошенко.

$$\sigma_{xz}^{(k)}(x, z) = \bar{Q}_{55}^{(k)} A_{55}^* \frac{Q(x)}{b} .$$

3.5.3. Вибрации

За натуралните вибрации, ние предполагаме, че приложената осова сила и напречно натоварване са нула, и че движението е периодично. Ур. (3.32) приемат вида

$$\begin{aligned} KG_{xz}^b bh \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{d\mathcal{X}}{dx} \right) + \omega^2 \hat{I}_0 W &= 0 \\ E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^2 \mathcal{X}}{dx^2} - KG_{xz}^b bh \left(\frac{dW}{dx} + \mathcal{X} \right) + \omega^2 \hat{I}_2 \mathcal{X} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Прилагаме същата процедура както преди за елиминиране на \mathcal{X} от ур. (3.37). От първото уравнение имаме

$$KG_{xz}^b bh \frac{d\mathcal{X}}{dx} = -\hat{I}_0 \omega^2 W - KG_{xz}^b bh \frac{d^2 W}{dx^2}$$

Заместваме получения резултат в производната $d\mathcal{X}/dx$ във второто уравнение на (3.37) получаваме

$$E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 W}{dx^4} + \left(\frac{E_{xx}^b I_{yy} \hat{I}_0}{KG_{xz}^b bh} + \hat{I}_2 \right) \omega^2 \frac{d^2 W}{dx^2} - \left(1 - \frac{\omega^2 \hat{I}_2}{KG_{xz}^b bh} \right) \hat{I}_0 \omega^2 W = 0 \quad (3.38)$$

или

$$\begin{aligned} p \frac{d^4 W}{dx^4} + q \frac{d^2 W}{dx^2} - r W &= 0 \\ p = E_{xx}^b I_{yy}, \quad q = \left(\frac{E_{xx}^b I_{yy}}{KG_{xz}^b bh} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_0} \right) \hat{I}_0 \omega^2, \quad r = \left(1 - \frac{\omega^2 \hat{I}_2}{KG_{xz}^b bh} \right) \hat{I}_0 \omega^2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Общото решение на ур. (2.29) е

$$W(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3 \sinh \mu x + c_4 \cosh \mu x \quad (3.40)$$

$$(2\lambda^2 p - q)^2 = q^2 + 4pr \quad \text{или} \quad p\lambda^4 - q\lambda^2 - r = 0 .$$

4. АНАЛИЗ НА СПЕЦИАЛНО ОРТОТРОПНИ ПЛОЧИ С КТСП ТЕОРИЯТА

4.1. Въведение

Управляващите уравнения за слоеви композити могат да се получат или аналитически или числено за обобщените премествания или деформации. Напреженията се получават или като се използват конструктивните уравнения или като се използват уравненията за равновесие в 3-D тримерния случай изписани чрез напрежения. Аналитични решения могат да се построят само за някои едномерни задачи, както беше показано, и за правоъгълни композити с конкретни композиционни схеми и гранични условия.

Тук с помощта на класическата теория на слоеви плочи ще построим аналитични решения на *специално ортотропни плочи*, т.е. плочи, за които обединените на опън и огъване коефициенти B_{ij} и коефициентите на огъване и усукване D_{16} и D_{26} са нула. Решение по метода на Навие (Navier) може да се получи за правоъгълна слоева плоча, когато всичките ѝ четири ръба са на шарнири. Решение по метода на Леви (Lévy) може да се получи за плочи, за които два противоположни ръба са на шарнири, а за останалите два могат да бъде избрана произволна комбинация от гранични условия (свободни, шарнирни или запънати). Методът на Райлейф-Ритц (Rayleigh-Ritz) може да се използва за определяне на приблизителни решения при по-обща гранични условия.

Анализът на специално ортотропни слоеви композити е силно опростен заради разделното независимо разглеждане на деформациите при огъване и при опън и от факта, че $D_{16} = D_{26} = 0$. Този случай, обаче е изключително полезен за разбирането из основи на поведението на плоча. Независимо, че повечето композити в практиката не могат да бъдат определени като специално ортотропни плочи, разглежданият тук случай може да представлява резонно приближение на по-комплексни композити. Решенията, получени за по-сложни композити ще бъдат сравнени с тези за специално ортотропни плочи, за да бъде оценено тяхното поведение.

Уравнението на движението за отместване w_0 при огъване на специално ортотропна плоча се получават от ур. (2.33в) като се пропуснат нелинейните членове, членовете за комбинирано огъване и опън, и членовете за огъване и усукване. Така имаме

$$\begin{aligned}
& - \left[D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] + q \\
& - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}^T}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^T}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^T}{\partial y^2} \right) + \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2 \hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
& = I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Уравнението (4.1) трябва да бъде решено в съответствие с подходящите гранични условия в уравнение (2.2) и начални условия на задачата, за желана реакция. Граничните условия във всяка точка върху границата имат следния вид:

$$\begin{aligned}
w_0 \quad \text{или} \quad Q_n &\equiv Q_x n_x + Q_y n_y \\
\frac{\partial w_0}{\partial n} \quad \text{или} \quad M_{nn}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ще определим статичните отмествания и напрежения и натуралните честоти на вибриране при вътрешно равнинни компресиращи или срязващи натоварвания за специално ортотропни плочи. Ще търсим точни решения, когато това е възможно, или приближени решения с метода на Райлейф-Ритц, когато не могат да бъдат построени точни решения.

4.2. Огъване на шарнирно закрепени правоъгълни плочи

4.2.1. Управляващи уравнения

Ще разгледаме статично огъване при отсъствие на термални ефекти и на вътрешно равнинни сили. Ур. (4.1) в този случай се редуцира до

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q \tag{4.3}$$

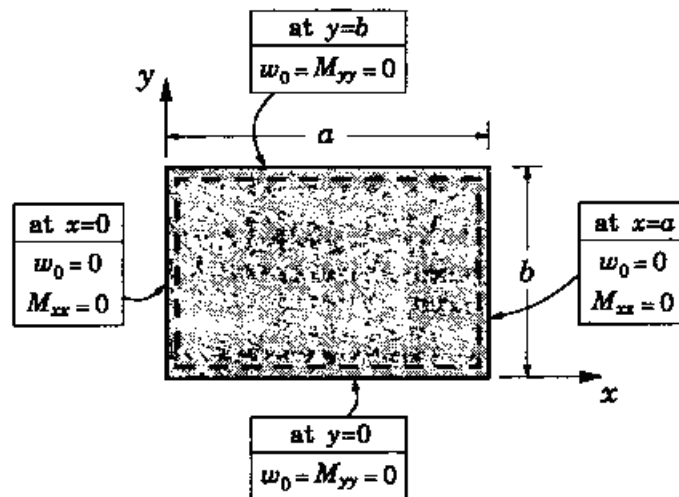
Граничните условия при шарнирно закрепени ръбове на правоъгълната плоча могат да се изпишат така (Фиг.4.1)

$$\begin{aligned}
w_0(x, 0) = 0, \quad w_0(x, b) = 0, \quad w_0(0, y) = 0, \quad w_0(a, y) = 0 \\
M_{xx}(0, y) = 0, \quad M_{xx}(a, y) = 0, \quad M_{yy}(x, 0) = 0, \quad M_{yy}(x, b) = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

където моментите на огъване са изразени чрез напречното преместване с уравненията

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
M_{yy} &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

и a и b са равнинните размери по x - и y -координатните оси на правоъгълния композит. За начало на координатната система е избран долния ляв ъгъл на средната равнина (Фиг. 4.1).



Фигура 4.1. Гранични условия за шарнирно закрепен правоъгълен ламинат

4.2.2. Решение по метода на Навие

По метода на Навие преместването w_0 се представя във вид на двоен тригонометричен ред на Фурие по неизвестни параметри. Тригонометричните функции в реда се избират така, че да бъдат удовлетворени граничните условия на задачата. Натоварването $q(x, y)$ също се развива в двоен тригонометричен ред. Замесването на реда на преместването и на реда на натоварването в управляващото уравнение трябва да дава обратимо множество от алгебрични уравнения спрямо параметрите на реда на преместването. В противен случай методът на Навие не може да бъде приложен. Шарнирното закрепване дава гранични условия в ур. (4.4), допускащи решение по метода на Навие.

Граничните условия в ур. (4.4) се удовлетворяват при следната форма на напречното преместване

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y
\tag{4.6}$$

където $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ и W_{mn} коефициенти, което трябва да бъдат определени така, че управляващото ур. (4.4) да се удовлетворява навсякъде в

областта на плочата. Предполагаме, че натоварването също може да бъде развито в ред както следва

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (4.7)$$

Като заместим редовете (4.6) и (4.7) в ур. (4.3) получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ -W_{mn} \left[D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \right] + Q_{mn} \right\} \sin \alpha x \sin \beta y = 0 \quad (4.8a)$$

Тъй като уравнението трябва да бъде изпълнено за всяка точка (x, y) в областта $0 < x < a$ и $0 < y < b$, изразът във фигуралните скоби трябва да бъде нула за всяко m и n . От тук следва

$$W_{mn} = \frac{Q_{mn}}{d_{mn}}$$

$$d_{mn} = \frac{\pi^4}{b^4} \left[D_{11}m^4 s^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2 n^2 s^2 + D_{22}n^4 \right] \quad (4.8b)$$

където $s = b/a$. Тогава решението на ур. (4.6) има вида

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{d_{mn}} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (4.9)$$

Ефектът от термални и електрически (пиезоелектрически) моменти може да бъде добавен непосредствено при пресмятането.

Решението по метода на Навие за синусоидално разпределено напречно натоварване

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

съдържа само един член, защото $m = n = 1$ и $Q_{mn} = 0$, и следователно е аналитично решение. За други видове натоварвания решението по метода на Навие е във вид на безкраен ред, който може да бъде оценен за достатъчен брой членове в реда. В частност, когато натоварването е равномерно и постоянно $q(x, y) = q_0$, получаваме

$$Q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \text{ при } m, n, \text{ нечетни} \quad (4.10)$$

За точково натоварване Q_0 в точката (x_0, y_0) , т.е. $q(x, y) = Q_0 \delta(x - x_0, y - y_0)$, коефициентите се дават с формулата

$$Q_{mn} = \frac{4Q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \quad (4.11)$$

Огъващите моменти могат да се пресметнат по формулите

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{11}\alpha^2 + D_{12}\beta^2) W_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\
 M_{yy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (D_{12}\alpha^2 + D_{22}\beta^2) W_{mn} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\
 M_{xy} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha\beta D_{66} W_{mn} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Равнинните напрежения могат да се пресметнат от ур. (2.12a)

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} &= -z \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_n}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
 &= z \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \begin{Bmatrix} (\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta^2) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ (\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta^2) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \\ -2\bar{Q}_{66}^{(k)} \alpha\beta \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Максималните нормални напрежения се появяват в точка $(x, y, z) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$.

Максималното срязващо напрежение е в точка $(x, u, z) = \left(a.b. - \frac{h}{2}\right)$.

Напреженията вътре във всеки слой са идентично нула, когато се пресмятат от конструктивните уравнения в класическата теория на ламинатите. При все това, те могат да бъдат пресметнати като се използват тримерните уравнения на равновесието на напреженията ур. (3.13) за всяко $-h/2 \leq z \leq z_{k+1}$:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_1^{(k)}(x, y) \\
 \sigma_{yz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_2^{(k)}(x, y) \\
 \sigma_{zz}^{(k)} &= - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_3^{(k)}(x, y)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

където напреженията $\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{xy}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}$ за известни от ур. (4.13), $C_i^{(k)}$ са функции, които следва да се определят от граничните условия и от непрекъснатостта на напреженията на междинните повърхнини на слоевете имаме

$$\sigma_{xz}(x, y, -\frac{h}{2}) = \sigma_{yz}(x, y, -\frac{h}{2}) = \sigma_{zz}(x, y, -\frac{h}{2}) = 0$$

Така получаваме

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz}^{(k)} &= -\mathcal{X}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{12}^{(k)} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \sigma_{yz}^{(k)} &= -\mathcal{Y}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{13}^{(k)} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
 \sigma_{zz}^{(k)} &= -\mathcal{Z}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{33}^{(k)} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

където

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}(z) &= \mathcal{Y}(z) = \left(\frac{z^2 - z_k^2}{2} \right), \quad \mathcal{Z}(z) = \left[-\frac{h^3}{24} + \frac{z}{6} (z^2 - 3z_k^2) \right] \\
 (T_{33}^{(k)} &= \alpha T_{12} + \beta T_{13}), \quad T_{12}^{(k)} = \alpha^3 \bar{Q}_{11}^{(k)} + \alpha\beta^2 (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) \\
 T_{13}^{(k)} &= \beta^3 \bar{Q}_{22}^{(k)} + \alpha^2\beta (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) \\
 T_{33}^{(k)} &= \alpha^4 \bar{Q}_{11}^{(k)} + 2\alpha^2\beta^2 (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)}) + \beta^4 \bar{Q}_{22}^{(k)}
 \end{aligned}$$

За едно-слоести плочи ур. (4.15) може да се опрости до

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{12}^{(1)} W_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
 \sigma_{yz} &= \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{13}^{(1)} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
 \sigma_{zz} &= -\frac{h^3}{48} \left\{ \left[1 + \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right] - 3 \left[1 + \left(\frac{2z}{h} \right) \right] \right\} \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{11}^{(1)} W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

При интегрирането на уравненията за равновесие на напреженията се предполага, че напреженията ($\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$) са равни на нула на най-долната повърхност на плочата ($z = -h/2$). Поради предположенията в теорията на композитните плочи, те ще бъдат също нула и при $z = h/2$. Напречното срязващо напрежение σ_{xz} е максимално при $(x, y, z) = (0, \frac{b}{2}, 0)$, а σ_{yz} е максимум при $(x, y, z) = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2})$.

Механичното натоварване се състои само от напречно натоварване $q(x, y)$. При термално влияние, температура е линейна по дебелината на композита $\Delta T = zT_1(x, y)$. Предполагаме, че q и T_1 могат да бъдат синусоидални, равномерни или точкови функции. В случая на равномерни и точкови източници, се оценяват първите десет члена от двойния тригонометричен ред.

4.3. Огъване на ламинати с два противоположни ръба закрепени шарнирно

4.3.1. Решение по метода на Леви

Разглеждаме правоъгълна плоча със закрепени шарнирно ръбове при $y = 0$ и $y = b$ и подложена на напречно натоварване q . Другите два ръба при $x = 0$ и $x = a$, независимо от първите два, могат да бъдат или свободни, или закрепени шарнирно, или запънати. За тази задача не може да бъде построено решение по метода на Навие. Но идеята от метода на Навие може да се приложи по отношение на граничните условия за шарнирно закрепените ръбове при $y = 0$ и $y = b$ с цел да се редуцира частното диференциално ур. (4.3) до обикновено диференциално уравнение спрямо координатата z , което след това може да се реши точно или приближено. Тази процедура се нарича метод на Леви.

В този случай решението може да се представи като единичен ред на Фурие във вида

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x) \sin \beta y \quad (4.17)$$

Подобно представяме натоварването

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) \sin \beta y \quad (4.18)$$

където $Q_n(x)$ са представени като:

$$Q_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b q(x, y) \sin \beta y$$

Решението в ур. (4.17) удовлетворява шарнирните гранични условия на ръбовете $y = 0$ и $y = b$. В случай на равномерно натоварване с интензивност q_0 , коефициентите Q_n се дават във вида

$$Q_n(x) = \frac{4q_0}{n\pi}, \quad n = 1, 3, \dots \quad (4.19)$$

Полагайки ур. (4.7) и (4.17) в ур. (4.3), получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{11} \frac{d^4 W_n}{dx^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2 \frac{d^2 W_n}{dx^2} + D_{22} \beta^4 W_n - Q_n \right] \sin \beta y = 0 \quad (4.20)$$

Тъй като резултатът е валиден за всяко y , то имаме

$$D_{11} \frac{d^4 W_n}{dx^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2 \frac{d^2 W_n}{dx^2} + D_{22} \beta^4 W_n = Q_n \quad (4.21)$$

Това обикновено диференциално уравнение от четвърти ред може да бъде решено или аналитично или с приближен метод. Аналитически ур. (4.21) се

решава или директно или в пространството на състоянията, когато се използва в теорията на управлението, както е случаят в тези изследвания. Като приближени методи могат да бъдат използвани, например, методът на Райлей-Ритц, методът крайните елементи и др. Тук представяме аналитично решение в пространството на състоянията и приближено решение по метода на Райлей-Ритц. По-късно ще обсъдим и решение с метода на крайните елементи.

4.3.2. Аналитични решения

Общата форма на аналитичното решение на ур. (4.21) е сума от решението на хомогенното уравнение и едно частно решение. Решението на хомогенното уравнение се дава във вида

$$W_n^h(x) = C \exp(\lambda x) \quad (4.22a)$$

където λ е корен на алгебричното уравнение

$$D_{11}\lambda^4 - 2(D_{12} + 2D_{66})\beta^2\lambda^2 + D_{22}\beta^4 = 0 \quad (4.22b)$$

Решението е линейна комбинация на фундаменталните решения, отговарящи на четирите корена на това уравнение. Разглеждаме три случая.

Случай 1: Реални и различни корени

$$(D_{12} + 2D_{66})^2 > D_{11}D_{22},$$

Тогаво хомогенната част на решението има формата

$$W_n^h(x) = A_n \cosh \lambda_1 x + B_n \sinh \lambda_1 x + C_n \cosh \lambda_3 x + D_n \sinh \lambda_3 x \quad (4.23)$$

Случай 2: Реални и кратни корени

$$(D_{12} + 2D_{66})^2 = D_{11}D_{22}$$

Хомогенната част на решението има формата

$$W_n^h(x) = (A_n + B_n x) \cosh \lambda x + (C_n + D_n x) \sinh \lambda x \quad (4.24)$$

Случай 3: Комплексни корени

$$(D_{12} + 2D_{66})^2 < D_{11}D_{22}$$

Хомогенната част на решението има формата

$$W_n^h(x) = (A_n \cos \lambda_2 x + B_n \sin \lambda_2 x) \cosh \lambda_1 x + (C_n \cos \lambda_2 x + D_n \sin \lambda_2 x) \sinh \lambda_1 x \quad (4.25)$$

В общия случай, когато Q_n е функция на x , частното решение на ур. (4.21) може да се намери по метода на неопределените коефициенти. Когато Q_n е константа, частното решение е константа, която се определя чрез заместване в ур. (4.21). В този случай получаваме частно решение от вида:

$$W_n^P(x) = \frac{Q_n}{D_{22}\beta^4} \equiv \hat{Q}_n \quad (kD_{22}\beta^4 = Q_n) \quad (4.26a)$$

Четири константи A_n, B_n, C_n, D_n в ур. (4.23), (4.24), (4.25) се определят от допълнителните четири гранични условия за ръбовете $x=0$ и $x=a$. Трите различни случая за коефициента λ в конкретна задача се определят от коравините D_{ij} на плочата. В частния случай, когато двата края са шарнирно закрепени, а другите два края са запънати, и собствените стойности са реални и различни, решението се дава с уравнението

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \lambda_1 x + B_n \sinh \lambda_1 x + C_n \cosh \lambda_3 x + D_n \sinh \lambda_3 x + W_n^P) \sin \beta_n y \quad (4.26b)$$

По нататък предполагаме, че приложеното напречно натоварване е равномерно разпределено.

Плоча закрепена шарнирно. Граничните условия при шарнирно закрепване на ръбовете $x=0, x=a$ и $y=0, y=b$ са

$$w_0 = 0, \quad M_{xx} \equiv - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.27)$$

Използвайки ур. (4.26b) и (4.27) получаваме

$$A_n + C_n + \hat{Q}_n = 0$$

$$A_n \cosh \lambda_1 a + B_n \sinh \lambda_1 a + C_n \cosh \lambda_3 a + D_n \sinh \lambda_3 a + \hat{Q}_n = 0$$

$$D_{11} (\lambda_1^2 A_n + \lambda_3^2 C_n) - D_{12} (A_n + C_n + \hat{Q}_n) \beta^2 = 0$$

$$D_{11} (A_n \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 a + B_n \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 a + C_n \lambda_3^2 \cosh \lambda_3 a + D_n \lambda_3^2 \sinh \lambda_3 a)$$

$$- D_{12} (A_n \cosh \lambda_1 a + B_n \sinh \lambda_1 a + C_n \cosh \lambda_3 a + D_n \sinh \lambda_3 a + \hat{Q}_n) \beta^2 = 0$$

където $\hat{Q}_n = \frac{Q_n}{\beta^4 D_{22}}$. От свойствата на първите две уравнения, изразите при

коефициентът D_{12} в последните две уравнения са идентично нула. Четирите уравнения могат да се запишат в матрична форма

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \lambda_1 a & \sinh \lambda_1 a & \cosh \lambda_3 a & \sinh \lambda_3 a \\ \lambda_1^2 & 0 & \lambda_3^2 & 0 \\ \lambda_1^2 \cosh \lambda_1 a & \lambda_1^2 \sinh \lambda_1 a & \lambda_3^2 \cosh \lambda_3 a & \lambda_3^2 \sinh \lambda_3 a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \hat{Q}_n \\ \hat{Q}_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Решението на ур. (4.28) е

$$\begin{aligned} A_n &= -\hat{Q}_n \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}, \quad B_n = -\hat{Q}_n \frac{\lambda_3^2 (1 - \cosh \lambda_1 a)}{\sinh \lambda_1 a (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} \\ C_n &= \hat{Q}_n \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)}, \quad D_n = \hat{Q}_n \frac{\lambda_3^2 (1 - \cosh \lambda_2 a)}{\sinh \lambda_2 a (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Плочи закрепени шарнирно при $y = 0, y = b$ и запънати при $x = 0, x = a$

Граничните условия при запънати ръбове $x = 0, x = a$ са

$$w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (4.30)$$

което дава

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \lambda_1 a & \sinh \lambda_1 a & \cosh \lambda_3 a & \sinh \lambda_3 a \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 \sinh \lambda_1 a & \lambda_1 \cosh \lambda_1 a & \lambda_3 \sinh \lambda_3 a & \lambda_3 \cosh \lambda_3 a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \hat{Q}_n \\ \hat{Q}_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Решението на матричното уравнение (4.31) е

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\hat{Q}_n \lambda_3}{E_n} [(\lambda_1 \sinh \lambda_3 a - \lambda_3 \sinh \lambda_1 a) \sinh \lambda_3 a \\ &\quad + \lambda_1 (\cosh \lambda_1 a - \cosh \lambda_3 a) (\cosh \lambda_3 a - 1)] \\ B_n &= \frac{\hat{Q}_n \lambda_3}{E_n} [\lambda_3 \sinh \lambda_3 a (\cosh \lambda_1 a - 1) + \lambda_1 \sinh \lambda_1 a (1 - \cosh \lambda_3 a)] \\ C_n &= -(A_n + \hat{Q}_n), \quad D_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} B_n \end{aligned} \quad (4.32)$$

Алтернативен метод за решаване на ур. (4.21) може да се даде в пространството на състоянията. Изписваме уравнението като матрично диференциално уравнение от осми ред и даваме решението чрез собствените стойности на матричния оператор. В случая ур. (4.21) с постоянни коефициенти придобива вида

$$\{Z'\} = [T]\{Z\} + \{F\}$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} W_n \\ W_n' \\ W_n'' \\ W_n''' \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{Q}_n \end{Bmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{D_{22}}{D_{11}} \beta^4, \quad C_2 = 2 \frac{(D_{12} + 2D_{66})}{D_{11}} \beta^2, \quad \hat{Q}_n = \frac{Q_n}{D_{11}} \quad (4.33)$$

Общото решение на ур. (4.33) се дава с израза

$$Z(x) = e^{Tx} \left(K + \int^x e^{-T\xi} F(\xi) d\xi \right) \equiv G(x)K + H(x) \quad (4.34)$$

$$e^{Tx} = [E] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_4 x} \end{bmatrix} [E]^{-1}$$

Тук $[E]$ е матрицата от собствените вектори на матрицата $[T]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ са собствените стойности на матрицата $[T]$, $\{K\}$ е вектор от константи, които следва да се определят от граничните условия на задачата.

Плочи закрепени шарнирно при $y = 0$, $y = b$ и при $x = 0$ и запънати при $x = a$. Условието (4.4) за шарнирно закрепване при $x = 0$ дават

$$W_n(0) = 0, \quad D_{11}W_n''(0) - D_{12}\beta^2 W_n(0) = 0 \quad (4.35a)$$

Условието (4.31) за запъване при $x = a$ дават

$$W_n(a) = 0, \quad W_n'(a) = 0 \quad (4.35b)$$

Тези четири условия предвид ур. (4.34) дават следната система нехомогенни алгебрични уравнения за $\{K\}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 G_{1j}(0)K_j + H_1(0) &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 (D_{11}G_{3j}(0) - \beta^2 D_{12}G_{1j}(0))K_j + D_{11}H_3(0) - D_{12}\beta^2 H_1(0) &= 0 \\ \sum_{j=1}^4 G_{1j}(a)K_j + H_1(a) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 G_{2j}(a)K_j + H_2(a) &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Предвид сложността на пресмятанята тази процедура се изпълнява на компютър.

4.3.3. Решение по метода на Райлеф-Ритц

В този параграф търсим решение на ур. (4.21) във вида

$$W_n(x) \approx \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j(x) \quad (4.37)$$

където $\varphi_j(x)$ са апроксимиращи функции, които трябва да отговарят на условията за непрекъснатост и пълнота и да удовлетворяват геометричните гранични условия. Параметрите c_j се определят от изискването да бъде изпълнена интегралната (слаба) форма на ур. (4.21)

$$0 = \int_0^a \left[D_{11} \frac{d^2 W_n}{dx^2} \frac{d^2 \delta W_n}{dx^2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2 \frac{dW_n}{dx} \frac{d\delta W_n}{dx} + D_{22} \beta^4 W_n \delta W_n - Q_n \delta W_n \right] dx \quad (4.38)$$

където δW_n е виртуалната вариация на W_n

$$\delta W_n(x) \approx \sum_{i=1}^N \delta c_i \varphi_i(x) \quad (4.39)$$

Замесвайки ур. (4.37) и (4.39) в ур. (4.38) получаваме

$$0 = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N c_j \int_0^a \left[D_{11} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} + D_{22} \beta^4 \varphi_j \varphi_i \right] dx - \int_0^a Q_n \varphi_i dx \right\} \delta c_i \quad (4.40)$$

Тъй като горният израз трябва да се удовлетворява за всяко δc_i , то следва че

$$0 = \sum_{j=1}^N A_{ij} c_j - F_i \quad \text{или} \quad [A]\{c\} = \{F\} \quad (4.41)$$

$$A_{ij} = \int_0^a \left[D_{11} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} + D_{22} \beta^4 \varphi_j \varphi_i \right] dx$$

$$F_i = \int_0^a Q_n \varphi_i dx$$

Ур. (4.41) представлява система алгебрични уравнения за c_i .

Друг начин да бъдат избрани $\varphi_i(x)$ е чрез собствените функции $W(x)$ ур. (3.19), откъдето

$$\varphi_i(x) = \sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x + \alpha_i (\cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = \lambda_i [\cos \lambda_i x - \cosh \lambda_i x + \alpha_i (\sinh \lambda_i x + \sin \lambda_i x)] \quad (4.42)$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a - 1 = 0$$

$$\alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a - \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a - \cos \lambda_i a} = \frac{\cosh \lambda_i a - \cos \lambda_i a}{\sinh \lambda_i a + \sin \lambda_i a}$$

4.4. Огъване на правоъгълни ламинати при различни гранични условия

4.4.1. Постановка чрез виртуалната работа

По методите на Навие и Леви не могат да бъдат построени решения за правоъгълни плочи с четири запънати края или когато няма два успоредни ръба закрепени шарнирно. Затова приближените методи за намиране на решения за плочи са много важни. В тази част на работата се използва метода на Райлеф-Ритц за определяне на огъващите премествания на специално ортотропни правоъгълни плочи при различни гранични условия.

При постановката чрез виртуалната работа (слаба форма), изразите за общата потенциална енергия за специално ортотропна правоъгълна плоча са ур. (2.15)

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^b \int_0^a \left(M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + M_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^{(1)} - q \delta w_0 \right) dx dy \\
 &= \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + D_{12} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} - q \delta w_0 \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi(w_0) &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2q w_0 \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Към горния израз следва да се добавят съответни членове в зависимост от допълнително приложените сили и моменти към ръбовете.

4.4.2. Запънати ламинати

Разглеждаме правоъгълна плоча, всичките ръбове на която са запънати, и която е подложена на разпределено напречно натоварване $q(x, y)$. Граничните условия в този случай са

$$\begin{aligned}
 w_0 = 0 \text{ and } \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0, a \\
 w_0 = 0 \text{ and } \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0, b
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Приемаме приближеното решение на Райлеф-Ритц във вида

$$w_0(x, y) \approx W_{mn}(x, y) = \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} \varphi_{ij}(x, y) \tag{4.46}$$

където апроксимиращите функции φ_{ij} удовлетворяват всичките хомогенни геометрични гранични условия в ур. (4.19). В този случай решението по метода на Райлеф-Ритц и по метода на Галеркин съвпадат при избора на едни и същи апроксимиращи функции.

Предвид на това, че плочата има правоъгълна форма, и че ръбове са запънати, апроксимиращите функции $\varphi_{ij}(x, y)$ могат да бъдат изразени като тензорно произведение на едномерните функции ур. (3.42):

$$\varphi_{ij}(x, y) = X_i(x)Y_j(y) \quad (4.47)$$

$$X_i(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2, \quad Y_j(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{j+1} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \quad (4.48)$$

Полагайки в ур (4.46) изразите за φ_{ij} от ур. (4.45) и израза

$$\delta w_0 = \sum_p^m \sum_q^n \delta c_{pq} \varphi_{pq}$$

в ур. (4.43), получаваме

$$0 = \sum_p^m \sum_q^n \left\{ \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_j \frac{d^2 X_p}{dx^2} Y_q + 4D_{66} \frac{dX_i}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dX_p}{dx} \frac{dY_q}{dy} \right. \right. \\ \left. \left. + D_{12} \left(X_i \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 X_p}{dx^2} Y_q + \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_j X_p \frac{d^2 Y_q}{dy^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + D_{22} X_i \frac{d^2 Y_j}{dy^2} X_p \frac{d^2 Y_q}{dy^2} \right] dx dy - \int_0^b \int_0^a q X_p Y_q dx dy \right\} \delta c_{pq} \quad (4.49a)$$

Тъй като твърдението трябва да е вярно за всички произволни вариации δc_{pq} , за всички p, q получаваме

$$0 = \sum_i^m \sum_j^n \left\{ \int_0^b \int_0^a \left[D_{11} \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_j \frac{d^2 X_p}{dx^2} Y_q + 4D_{66} \frac{dX_i}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dX_p}{dx} \frac{dY_q}{dy} \right. \right. \\ \left. \left. + D_{12} \left(X_i \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 X_p}{dx^2} Y_q + \frac{d^2 X_i}{dx^2} Y_j X_p \frac{d^2 Y_q}{dy^2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + D_{22} X_i \frac{d^2 Y_j}{dy^2} X_p \frac{d^2 Y_q}{dy^2} \right] dx dy \right\} c_{ij} - \int_0^b \int_0^a q X_p Y_q dx dy \quad (4.49b)$$

Ур. (4.49b) представлява система алгебрични уравнения $m \times n$ спрямо коефициентите c_{ij} .

4.4.3. Апроксимиращи функции за други гранични условия

В този параграф изброяваме апроксимиращи функции $\varphi_{ij} = X_i(x)Y_j(y)$ при метода на Райлеф-Ритц в ур. (4.46) за специално ортотропни правоъгълни плочи

при различни гранични условия, които са използвани при числените резултати в работата. Изборът е ограничен от тензорното произведение на собствени функции за греди при съответни гранични условия.

1) Запънати при $x=0, x=a$ и шарнирно закрепени при $y=0, y=b$

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x + \alpha_i (\cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x)$$

$$Y_j(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a - 1 = 0 \quad \alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a - \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a - \cos \lambda_i a}$$

2) Запънати при $x=0$, свободни при $x=a$ и шарнирно закрепени при $y=0, y=b$

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x + \alpha_i (\cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x)$$

$$Y_j(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a + 1 = 0 \quad \alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a + \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a + \cos \lambda_i a}$$

3) Свободни при $x=0, x=a$ и шарнирно закрепени при $y=0, y=b$

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x + \sinh \lambda_i x - \alpha_i (\cosh \lambda_i x + \cos \lambda_i x)$$

$$Y_j(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a - 1 = 0 \quad \alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a - \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a - \cos \lambda_i a}$$

4) Шарнирно закрепени при $x=0, y=0, y=b$ и запъната при $x=a$

$$X_i(x) = \sinh \lambda_i a \sin \lambda_i x + \sin \lambda_i a \sinh \lambda_i x$$

$$Y_j(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\tan \lambda_i a - \tanh \lambda_i a = 0$$

5) Шарнирно закрепени при $x=0, y=0, y=b$ и свободна при $x=a$

$$X_i(x) = \sinh \lambda_i a \sin \lambda_i x - \sin \lambda_i a \sinh \lambda_i x$$

$$Y_j(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където λ_i са корените на характеристичното уравнение

$$\tan \lambda_i a - \tanh \lambda_i a = 0$$

б) Запънати при $x=0$ и свободни при $y=0, y=b, x=a$

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x + \alpha_i (\cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x)$$

$$Y_j(y) = \sin \mu_j y + \sinh \mu_j y - \beta_j (\cosh \mu_j y + \cos \mu_j y)$$

където λ_i и μ_j са корените на характеристичните уравнения

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a + 1 = 0, \quad \cos \mu_j b \cosh \mu_j b - 1 = 0$$

$$\alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a + \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a + \cos \lambda_i a}, \quad \beta_j = \frac{\sinh \mu_j b - \sin \mu_j b}{\cosh \mu_j b - \cos \mu_j b}$$

7) Запънати при $x=0$, шарнирно закрепени при $y=0$ и свободни при $x=a, y=b$

$$X_i(x) = \sin \lambda_i x - \sinh \lambda_i x + \alpha_i (\cosh \lambda_i x - \cos \lambda_i x)$$

$$Y_j(y) = \sinh \mu_j b \sin \mu_j y - \sin \mu_j b \sinh \mu_j y$$

където λ_i и μ_j са корените на характеристичните уравнения

$$\cos \lambda_i a \cosh \lambda_i a + 1 = 0, \quad \tan \mu_j b - \tanh \mu_j b = 0$$

$$\alpha_i = \frac{\sinh \lambda_i a + \sin \lambda_i a}{\cosh \lambda_i a + \cos \lambda_i a}$$

4.5. Вибрации на шарнирно закрепени ламинат

За натурални вибрации, всички приложени сили и всички равнинни сили се полагат нула в ур. (2.33в), изпускайки допълнително нелинейните членове и членовете от комбинирано огъване с усукване и огъване с разтягане.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.50)$$

$$I_0 = \sum_{k=1}^L \rho_0^{(k)} (z_{k+1} - z_k), \quad I_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^L \rho_0^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)$$

където L означава общия брой на слоевете.

Търсим периодично решение във вида

$$W_{mn}(\ell) = W_{mn}^0 e^{i\omega \ell} \quad (4.51)$$

Полагайки ур. (4.51) в ур. (4.50), получаваме

$$\left\{ D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 - \omega^2 [I_0 + (\alpha^2 + \beta^2) I_2] \right\} \times W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y = 0 \quad (4.52)$$

Тъй като уравнението трябва да се удовлетворява във всяка точка (x, y) на областта $0 < x < a$ и $0 < y < b$, за всяко m и n получаваме

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{I_0 b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + D_{22} n^4 \right] \quad (4.53)$$

$$\bar{I}_0 = I_0 + I_2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

На различни m и n отговаря единствена честота ω_{mn} и съответната ѝ мода

$$w_0(x, y) = W_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4}{I_0 b^4} \left[D_{11} m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + D_{22} n^4 \right]$$

За изотропния случай получаваме

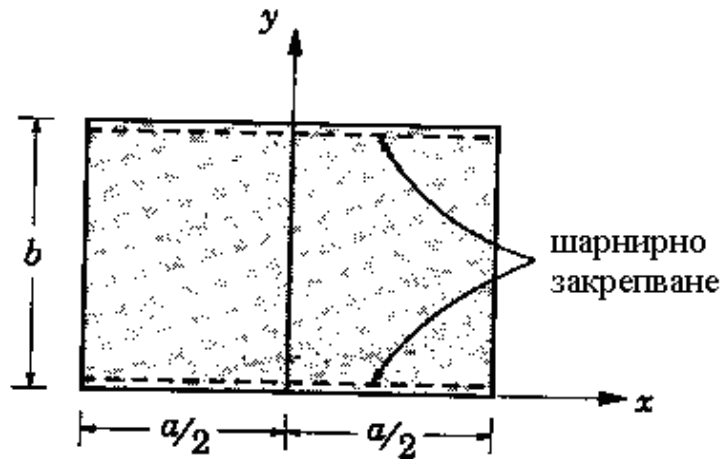
$$\omega_{mn}^2 = \frac{D\pi^4}{I_0 b^4} \left[m^4 \left(\frac{b}{a} \right)^4 + 2m^2 n^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + n^4 \right] = \frac{D\pi^4}{I_0 b^4} \left[m^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2 \quad (4.54)$$

и фундаменталната (най-малката) честота се дава с формулата

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{I_0}} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right].$$

4.6. Вибрация на ламинати с два успоредни ръба закрепени шарнирно

Разглеждаме правоъгълен композит с равнинни размери a и b обща дебелина h . Координатната система (x, y, z) се взема така, че $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq b, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ (Фиг.4.2). Предполагаме, че ръбовете $y=0, y=b$ са шарнирно закрепени, а останалите два ръба са или шарнирно закрепени, или запънати или свободни.



Фигура 4.2. Правоъгълен ламинат при метод на Леви

Управляващите уравнения за натурални вибрации на специално ортотропна композитна плоча се дават с ур. (4.1):

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.55)$$

В метода на Леви частното диференциално уравнение (4.55) се редуцира до обикновено диференциално уравнение спрямо x поради това, че решението се търси като единичен ред на Фурие:

$$w_0(x, y) = W_n(x) \sin \beta y, \quad \beta = \frac{n\pi}{b} \quad (4.56)$$

който удовлетворява граничните условия за шарнирно закрепване

$$w_0 = 0, \quad M_{xx} = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.57)$$

на ръбовете $y = 0, y = b$. Обикновените диференциални уравнения, получени по метода на Леви, могат да се решат или чрез пряка интегриране или в пространството на състоянията. Ще разгледаме и двата случая.

4.6.1. Директно интегриране

Разглеждаме натурални вибрации на специално ортотропна плоча. За периодично движение предполагаме, че

$$w_0(x, y, t) = \bar{w}_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (4.58)$$

Амплитудата на вибрациите \bar{w}_0 се представя с ур. (4.56). Полагайки (4.56) в управляващите уравнения (4.55) с равнинни сили равни на нула, получаваме за всяко y и t :

$$D_{11} \frac{d^4 W_n}{dx^4} + [I_2 \omega^2 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2] \frac{d^2 W_n}{dx^2} - [\omega^2 (I_0 + I_2 \beta^2) - D_{22} \beta^4] W_n = 0$$

(4.59)

или

$$p \frac{d^4 W_n}{dx^4} + q \frac{d^2 W_n}{dx^2} - r W_n = 0$$

$$p = D_{11}, \quad q = I_2 \omega^2 - 2(D_{12} + 2D_{66}) \beta^2, \quad r = \omega^2 (I_0 + I_2 \beta^2) - D_{22} \beta^4$$

(4.60)

Ур. (4.60) съвпадат с ур. (3.18) и по-нататък се следва процедурата в § 3.4, за да бъдат определени натуралните честоти за различни гранични условия на ръбовете $x = 0, x = a$.

4.6.2. В пространството на състоянията

Както беше обяснено в предишния § 4.6.1, управляващите уравнения могат да се редуцират чрез ур. (4.56) до система от диференциални уравнения от първи ред описани в матричен вид:

$$\{Z'\} = [T]\{Z\}$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} W_m \\ W_m' \\ W_m'' \\ W_m''' \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_1 & 0 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = -\frac{(\beta^4 D_{22} - \hat{I}_0 \omega_m^2)}{D_{11}}, \quad C_2 = \frac{[2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) - I_2 \omega_m^2]}{D_{11}}$$

(4.61a)

за свободно вибриране. Тук ω_m е честотата на m -тата мода, $\hat{I}_0 = I_0 + \beta^2 I_2$.

Решението на ур. (4.61a) се дава с

$$Z(x) = e^{Ax} K$$

(4.61b)

и векторът K от константи се определя от граничните условия. Полагайки ур. (4.61b) в граничните условия дава система хомогенни уравнения. Корените на детерминантата на тази система са квадратите на честотите на вибрациите.

4.7. Динамичен анализ

Методите на Навие, Леви и Райлеф-Ритц, използвани за статичен анализ, се приложат в пространствените вариации на динамичните решения за плочи. Получените обикновени диференциални уравнения включват и времето и дават възможност да се търсят точни и числени решения. В работата тези идеи се прилагат за шарнирно закрепени плочи.

4.7.1. Вариране на решението в пространството

Управляващото уравнение на движенията за огъващото отместване w_0 на специално ортотропна плоча без приложени равнинни и термални сили е ур. (4.1):

$$\begin{aligned} -\left[D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right] + q(x, y, t) \\ = I_0 \ddot{w}_0 - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Предполагаме, че плочата е шарнирно закрепена и граничните условия са:

$$\begin{aligned} w_0(x, 0, t) = 0, \quad w_0(x, b, t) = 0, \quad w_0(0, y, t) = 0, \quad w_0(a, y, t) = 0 \quad \text{за } t \geq 0 \\ M_{xx}(0, y, t) = 0, \quad M_{xx}(a, y, t) = 0, \quad M_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad M_{yy}(x, b, t) = 0 \quad \text{за } t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

и предполагаем, че началните условия имат вида

$$w_0(x, y, 0) = d_0(x, y), \quad \frac{\partial w_0}{\partial t}(x, y, 0) = v_0(x, y) \quad \text{за всички } x \text{ и } y \quad (4.64)$$

За да удовлетворява граничните условия (4.63), напречното преместваем търсим като безкраен ред за всеки момент време $t \geq 0$ от вида:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \quad (4.65)$$

Аналогично предполагаем, че напречното натоварване, началното отместване и началната скорост могат да се представят като безкрайни редове:

$$\begin{aligned} q(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \sin \alpha x \sin \beta y \\ d_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\ v_0(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (4.66)$$

където, например, Q_{mn} се дават с израза

$$Q_{mn}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y, t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Полагайки ур. (4.66) в ур. (4.62), получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ W_{mn} \left[D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \right] + \left[I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \right] \ddot{W}_{mn} - Q_{mn} \right\} \sin \alpha x \sin \beta y = 0$$

Тъй като последното уравнение трябва да се удовлетворява за всяко x и y , то

$$W_{mn} \left[D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \right] + \left[I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \right] \ddot{W}_{mn} - Q_{mn} = 0$$

или

$$\begin{aligned} K_{mn} W_{mn}(t) + M_{mn} \ddot{W}_{mn} &= Q_{mn}(t) \\ K_{mn} &= D_{11}\alpha^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha^2\beta^2 + D_{22}\beta^4 \\ M_{mn} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.7.2. Интегриране по времето

Обикновеното диференциално уравнение (4.67) може да се реши или точно или числено. В този параграф ще представим едно точно решение. Първоначално записваме ур. (4.67) във вида

$$\frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} + \left(\frac{K_{mn}}{M_{mn}} \right) W_{mn} = \frac{1}{M_{mn}} Q_{mn}(t) \quad (4.68)$$

Решението на ур. (4.68) се дава във вида

$$W_{mn}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + W_{mn}^p(t) \quad (4.69)$$

където интеграционните константи C_1, C_2 се определят от началните условия, а $W_{mn}^p(t)$ е частно решение

$$\begin{aligned} W_{mn}^p(t) &= \int^t \frac{\tau_1(\tau)\tau_2(t) - \tau_1(t)\tau_2(\tau)}{\tau_1(\tau)\dot{\tau}_2(\tau) - \dot{\tau}_1(\tau)\tau_2(\tau)} Q_{mn}(\tau) d\tau \\ \tau_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \quad \tau_2(t) = e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

и λ_1, λ_2 са корените на характеристичното уравнение

$$\lambda_1 = -i\mu, \quad \lambda_2 = i\mu, \quad \mu = \sqrt{\frac{K_{mn}}{M_{mn}}}$$

Решението придобива вида

$$\begin{aligned} W_{mn}(t) &= A \cos \mu t + B \sin \mu t + W_{mn}^p(t) \\ W_{mn}^p(t) &= \frac{1}{2i\mu} \left(e^{i\mu t} \int^t e^{-i\mu\tau} Q_{mn}(\tau) d\tau - e^{-i\mu t} \int^t e^{i\mu\tau} Q_{mn}(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

За натоварване от вида $Q_{mn}(t) = Q_{mn}^0 H(t)$, където $H(t)$ е функцията на Хевисайд, ур. (4.70) приема вида

$$W_{mn}(t) = A \cos \mu t + B \sin \mu t + \frac{1}{K_{mn}} Q_{mn}^0$$

От началните условия (4.64) получаваме

$$A = D_{mn} - \frac{1}{K_{mn}} Q_{mn}^0, \quad B = \frac{V_{mn}}{\mu}$$

и окончателното решение се дава с формулата

$$w_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[D_{mn} \cos \mu t + \frac{V_{mn}}{\mu} \sin \mu t + \frac{Q_{mn}^0}{K_{mn}} (1 - \cos \mu t) \right] \sin \alpha x \sin \beta y \quad (4.71)$$

4.8. Едно точно решение за ламинати от ФПМ и ПФК материали

В тази част от работата ще разгледаме правоъгълна плоча от функционално подобрен материал ФПМ, интегриран с пиезоелектрически композит усилен с фибри ПКФ. Целта е да се построи точно решение за анализ на тези структури.

В повечето случаи се работи с монолитни пиезоелектрически материали. Главен гефет недостатък е, че тяхната управляваща сила е слаба поради неголемите коефициенти между напрежение и деформация. Отговорен за това е коефициентът e_{31} , определящ индуцираното нормално напрежение във фибъра дължащо се на приложеното електрическо поле. Пиезоелектрически композит с фибри ПКФ предлага по-големи стойности на e_{31} . Тези материали имат сложно поведение (нелинейно по дебелината) и за намирането на точно решение на управляващите уравнения се изисква специален подход.

4.8.1. Метод

Правоъгълната плоча има дължина a , ширина b и дебелина h . ПКФ слой покрива повърхността на плочата и има дебелина h_p . Ръбовете на плочата са $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$.

Пиезоелектрическите влакна в ПФК слоя са по дължината в равнината на слоя, който е успореден на основната равнина. Когато ПФК слой е подложен на електрическо поле, равнинното действие на активирания слой може да се ползва да бъдат управлявани деформациите на основния ФПМ слой на плочата.

За получаването на точните решения за преместванията и напреженията на тази интелигентна плоча, подложена на комбинирано механично и електрическо на ПФК слоя въздействие, се прилага методът на Пагано (Pagano). За тази цел следва да се получат изразите за преместванията и напреженията за ФПМ слоя и

за ПФК слоя, удовлетворявайки всички управляващи уравнения, гранични условия, опън на повърхнините и условията за непрекъснатост между слоевете. Тъй като върху ФПМ слоя действа едновременно електрическо и еластично поле, за да се построят точните решения за композитната плоча, изразите за електрическите премествания и потенциала също трябва да бъдат получени, удовлетворявайки всички електрически гранични условия

Конструктивните уравнения за еластичен ФПМ слой се

$$\{\sigma^1\} = [C^1] \{d^1\} \quad (4.72)$$

За ПФК слоя те са

$$\begin{aligned} \{\sigma^2\} &= [C^2] \{d^2\} - [e] \{E\} \\ \{D^2\} &= [e^2]^T \{d^2\} + [\varepsilon^2] \{E\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

където $\{\sigma\}$ е векторът на напреженията, $\{d\}$ е векторът на деформациите, $[C]$ е матрицата на еластичните константи, $[\varepsilon]$ е диагоналната матрица на диелектричните константи, $[e]$ е матрицата на пиезоелектрическите константи на напрежението ($e_{31}, e_{33}, e_{24}, e_{15} \neq 0$), $\{E\}$ е векторът на електрическото поле, и $\{D\}$ е векторът на електрическите премествания.

За основния ФПМ слой правим следните предположения. Той е изотропен във всяка точка на плочата. Коефициентът на Поасон е константа в цялата област на ФПМ плочата. Материалните свойства са експоненциални функции по дебелината z . Пред вид на това, модулът на Юнг E и еластичните константи C_{ij}^1 се изразяват чрез модула на Юнг E_0 и еластичните константи C_{ij}^0 на долната повърхнина на ФПМ плочата и чрез индекса λ на нехомогенност както следва

$$E = E_0 \exp(\lambda z) \quad (4.74)$$

$$C_{ij}^1 = C_{ij}^0 \exp(\lambda z) \quad i, j = 1 \div 6 \quad (4.75)$$

В зависимост от индекса λ , или горната или долната повърхнина на ФПМ плочата е по-податлива.

Управляващите уравнения на равновесие за ФПМ и ПФК слоевете, разгледани като еластична среда без външни влияния могат да се изразят чрез уравненията

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad i, j = x, y, z \quad (4.76)$$

Уравнението за равновесие на електричеството за ПФК слоя трябва да се удовлетворява условието

$$D_{i,j} = 0 \quad i = x, y, z \quad (4.77)$$

Граничните условия за шарнирно закрепена плоча, при които може да се получи точно решение са

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 = v^1 = w^1 = 0, \quad \sigma_x^2 = v^2 = w^2 = 0 & \quad \text{при} \quad x=0, \quad x=a \\ \sigma_y^1 = v^1 = w^1 = 0, \quad \sigma_y^2 = v^2 = w^2 = 0 & \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b' \end{aligned} \quad (4.78)$$

където u , v , и w механичните премествания.

Предположението, че ръбовете на ПФК слоя са подходящо поставени, води до електрически потенциал равен на нула като гранично условие за ПФК слоя.

$$\phi = 0 \quad \text{и} \quad x=0, \quad x=a \quad \text{и} \quad y=0, \quad y=b \quad (4.77)$$

Допустими функции за преместванията и електрическия потенциал, удовлетворяващи граничните условия са

$$\begin{aligned} u^1 &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot U^1(z), & u^2 &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot U^2(z), \\ v^1 &= \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \cdot V^1(z), & v^2 &= \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b} \cdot V^2(z), \\ w^1 &= \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot W^1(z), & w^2 &= \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot W^2(z), \\ \phi &= \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot \Phi(z) \end{aligned} \quad (4.78)$$

в които m , n са номерата на модите и $U^1, V^1, W^1, U^2, V^2, W^2, \Phi$ са съответните вариации по дебелината.

4.8.2. Решения за ФПМ слоя

За ПФК слоя на композитната плоча $U^1(z)$, $V^1(z)$, и $W^1(z)$ могат да се изразят по следния начин като функции на дебелината

$$[U^1 \quad V^1 \quad W^1] = [U^{01} \quad V^{01} \quad W^{01}] \cdot \exp(\rho z) \quad (4.79)$$

$U^{01}, V^{01}, W^{01}, \rho$ са неизвестни константи, които следва да се определят.

Полагайки ур. (4.72) в ур. (4.76) заедно с ур. (4.74), (4.75), (4.78) и (4.79) получаваме алгебрична система от хомогенни уравнения:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{01} \\ V^{01} \\ W^{01} \end{bmatrix} = 0, \quad d_{ij}(C_{ij}^0, \rho, \lambda, m, n, a, b) \quad (4.80)$$

От последните две уравнения на тази система определяме $V^{01} = L_1 U^{01}$ и $W^{01} = L_2 U^{01}$ чрез неизвестното U^{01} . Полагаме ги в първото уравнение на (4.80) и получаваме характеристичното уравнение за основния ФПМ слой на плочата

$$\sum_{n=1}^6 \alpha_n \rho^n = 0, \quad \alpha_n(C_{ij}^0, \lambda, m, n, a, b) \quad (4.81)$$

с корени $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_6$. Така изразите за преместванията u^1, v^1, w^1 във всяка точка на ФПМ слоя са

$$\begin{aligned}
u^1 &= \sum_{i=1}^6 \eta_i \exp(\rho_i z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
v^1 &= \sum_{i=1}^6 \eta_i L_1(\rho_i) \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
w^1 &= \sum_{i=1}^6 \eta_i L_2(\rho_i) \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Тук η_i се определят при удовлетворяването на граничните условия и условията за непрекъснатост между ФПМ и ПФК слоевете.

Накрая, използвайки конструктивните урантетия (4.72) заедно с уравнения (4.77) и (3.81) получаваме решенията за напреженията във всяка точка на ФПМ слоя на плочата както следва:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(-\frac{m\pi}{a} C_{11}^0 - \frac{n\pi}{b} C_{12}^0 L_1(\rho_i) + C_{12}^0 \rho_i L_2(\rho_i) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
\sigma_y^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(-\frac{m\pi}{a} C_{12}^0 - \frac{n\pi}{b} C_{22}^0 L_1(\rho_i) + C_{23}^0 \rho_i L_2(\rho_i) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
\sigma_z^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(-\frac{m\pi}{a} C_{13}^0 - \frac{n\pi}{b} C_{23}^0 L_1(\rho_i) + C_{33}^0 \rho_i L_2(\rho_i) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
\sigma_{yz}^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(C_{44}^0 (\rho_i L_1(\rho_i) + \frac{n\pi}{b} L_2(\rho_i)) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\
\sigma_{xz}^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(C_{55}^0 (\rho_i + \frac{m\pi}{a} L_2(\rho_i)) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\
\sigma_{xy}^1 &= \sum_{i=1}^6 \left(C_{66}^0 (\frac{n\pi}{b} + \frac{m\pi}{a} L_1(\rho_i)) \right) \eta_i \exp(\rho_i z) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

4.8.3. Решение за ПФК слоя

За ПФК слоя допустимите функции $U^2(z), V^2(z), W^2(z), \Phi(z)$ могат да бъдат изразени както следва :

$$\begin{aligned}
U^2 &= U^{02} \exp(\mu z), & V^2 &= V^{02} \exp(\mu z), \\
W^2 &= W^{02} \exp(\mu z), & \Phi &= \Phi^0 \exp(\mu z)
\end{aligned} \tag{4.83}$$

където $U^{02}, V^{02}, W^{02}, \Phi^0, \mu$ неизвестни константи, които следва да се определят.

Използваме управляващите уравнения (4.76), (4.77), конструктивните уравнения (4.73), (4.74) и уравнения (4.78), (4.83) и получаваме друга система от хомогенни алгебрични уравнения

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\psi & g_{14}\psi \\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\psi & 0 \\ -g_{13}\psi & -g_{23}\psi & g_{33} & 0 \\ -g_{14}\psi & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{02} \\ V^{02} \\ W^{02} \\ \Phi^0 \end{bmatrix} = 0, \quad g_{ij}(C_{ij}^2, e_{ij}, \varepsilon_{ij}, \psi, m, n, a, b) \quad (4.84)$$

Тук C_{ij}^2 са константи. От тази система (4.84) изразяваме неизвестните константи $V^{02} = M_1 U^{02}$, $W^{02} = M_2 U^{02}$, и $\Phi^0 = M_3 U^{02}$ чрез неизвестната константа U^{02} и полагаме в първото от уравненията на (4.84). Това води до характеристичното уравнение за ПФК слоя

$$\sum_{n=1}^5 \beta_n \psi^{2(n-1)} = 0, \quad \beta_n(C_{ij}^2, g_{ij}, \varepsilon_{ij}) \quad (4.85)$$

което има четири двойки реални корена $\pm\psi_1, \pm\psi_2, \pm\psi_3, \pm\psi_4$.

Изразите за осовите премествания u^2, v^2, w^2 и електрическия потенциал ϕ във всяка точка на ПФК слоя имат следния вид

$$\begin{aligned} u^2 &= \sum_{i=1}^4 \{p_i \cosh(\psi_i z) + q_i \sinh(\psi_i z)\} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ v^2 &= \sum_{i=1}^4 \{p_i \cosh(\psi_i z) + q_i \sinh(\psi_i z)\} M_1(\psi_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w^2 &= \sum_{i=1}^4 \{p_i \cosh(\psi_i z) + q_i \sinh(\psi_i z)\} M_2(\psi_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \phi &= \sum_{i=1}^4 \{p_i \sinh(\psi_i z) + q_i \cosh(\psi_i z)\} M_3(\psi_i) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (4.86)$$

От последното ур. (4.86) и от конструктивните съотношения (4.73), (4.74) се получават изразите за напреженията в пиезоелектрическия слой, които удовлетворяват точно управляващите уравнения (4.76), (4.77), както следва

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sum_{j=1}^4 (-pC_{11}^2 - qC_{12}^2 F_j^3 + C_{13}^2 F_j^4 r_j + e_{31} F_j^5 r_j) \{\alpha_j \cosh(r_j z) \\ &\quad + \beta_j \sinh(r_j z)\} \sin px \sin qy \end{aligned} \quad (4.87a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \sum_{j=1}^4 (-pC_{12}^2 - qC_{22}^2 F_j^3 + C_{23}^2 F_j^4 r_j) \{\alpha_j \cosh(r_j z) \\ &\quad + \beta_j \sinh(r_j z)\} \sin px \sin qy \end{aligned} \quad (4.87b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= \sum_{j=1}^4 (-pC_{13}^2 - qC_{23}^2 F_j^3 + C_{33}^2 F_j^4 r_j) \{\alpha_j \cosh(r_j z) \\ &\quad + \beta_j \sinh(r_j z)\} \sin px \sin qy \end{aligned} \quad (4.87b)$$

$$\sigma_{xz}^2 = \sum_{j=1}^4 C_{44}^2 (F_j^3 r_j + q F_j^4) \{ \alpha_j \sinh(r_j z) + \beta_j \cosh(r_j z) \} \sin px \cos qy \quad (4.87\Gamma)$$

$$\sigma_{xz}^2 = \sum_{j=1}^4 C_{55}^2 (r_j + p F_j^4) \{ \alpha_j \sinh(r_j z) + \beta_j \cosh(r_j z) \} \cos px \sin qy \quad (4.87\Delta)$$

$$\sigma_{xy}^2 = \sum_{j=1}^4 C_{66}^2 (p F_j^3 + q) \{ \alpha_j \cosh(r_j z) + \beta_j \sinh(r_j z) \} \cos px \cos qy \quad (4.87\epsilon)$$

4.8.4. Оценяване на решението

За да се оцени поведението на композитната ФПМ плоча с прикрепен ПФК слой, трябва да се разгледат числени стойности на точното решение. Ще отбележим, че решението съдържа 14 неизвестни константи. За да бъдат намерени и да се получи точното решение ще определим граничните условия и условията за непрекъснатост между слоевете както следва.

На външната повърхност на пиезоелектрическия слой ще изберем следните гранични условия:

$$\sigma_z^2 = f_\sigma \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \sigma_{xz}^2 = 0, \quad \sigma_{yz}^2 = 0 \quad (4.88)$$

$$\phi = f_\phi \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

където where f_σ и f_ϕ са амплитудите на външните влияние и на електрическия отенциал на ниво $z = h + h_p$. На повърхността на ПФК слоя в съприкосновение с ФПМ основния слой на плочата се предполага, че електрическият потенциал е нула.

Трябва да бъдат удовлетворени условията за непрекъснатост между двата ФПМ и ПФК слоя:

$$u^1 \Big|_{z=h} = u^2 \Big|_{z=h}, \quad v^1 \Big|_{z=h} = v^2 \Big|_{z=h}, \quad w^1 \Big|_{z=h} = w^2 \Big|_{z=h} \quad (4.89)$$

$$\sigma_z^1 \Big|_{z=h} = \sigma_z^2 \Big|_{z=h}, \quad \sigma_{yz}^1 \Big|_{z=h} = \sigma_{yz}^2 \Big|_{z=h}, \quad \sigma_{xz}^1 \Big|_{z=h} = \sigma_{xz}^2 \Big|_{z=h}$$

Външната повърхност на ФПМ основния слой на плочата граничните условия се дават както следва

$$\sigma_z^1(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_{yz}^2(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_{xz}^2(x, y, 0) = 0 \quad (4.90)$$

5. АНАЛИЗ НА СЛОЕСТИ КОМПОЗИТИ С МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ

5.1. Въведение

В предходните раздели разгледахме точни решения на уравненията на композитни греди и правоъгълни плочи по методите на Навие, Леви, Райлеф-Ритц и Пагано. Но точните и вариационни решения на тези задачи не могат да бъдат построени при сложна геометрия, произволни гранични условия или включени нелинейности в уравненията на движението. Затова се налагат приближени методи за анализ, които дават възможност за решаване на тези задачи.

Методът на крайните елементи (МКЕ) е мощна числена техника за решаването на диференциални и интегрални уравнения, които се появяват в редица области на инженерната и приложните науки. Методът е обобщение на класическия вариационен (т.е. Райлеф-Ритц) и тегловно-остатъчен (т.е. Галеркин, най-малките квадрати, ко-локация и др.) методи. Тъй като повечето реални задачи са дефинирани върху области, които имат сложна геометрична форма и имат различен тип гранични условия върху части от границата на областта, е трудно да бъдат обобщени апроксимиращите функции от традиционните вариационни методи. Основната идея на МКЕ е дадена област да се представи като съставено от прости геометрични форми, наречени *крайни елементи*, за които е възможно систематически да се създадат апроксимиращите функции, необходими в решението на диференциални уравнения с вариационен или тегловно-остатъчен методи. Възможността областите с нерегулярни геометрични форми да се представят с множество крайни елементи прави методът ценен практически инструмент за решаването на гранични, начални и на собствени стойности задачи, възникващи в различни области на инженерната практика. Апроксимиращите функции често се конструират като се ползват идеи от интерполирането, затова често се наричат *интерполационни функции*. Така МКЕ е частична апроксимация (по-елементна) на вариационни методи. За дадено диференциално уравнение е възможно да бъдат построени различни апроксимации на крайния елемент (различни модели от крайни елементи) в зависимост от избора на частен вариационен метод.

Основните стъпки при анализа с крайни елементи за стандартна задача са

1. Дискретизация на областта на множество от крайни елементи (*генериране на мрежа*).

2. Тегловно-интеграционна или слаба формулировка на диференциалното уравнение за отделния краен елемент (подобласт).
3. Разработване на МКЕ модела на задачата използвайки неговата тегловно-интегрална или слаба форма. МКЕ моделът се състои от множество от алгебрични уравнения спрямо неизвестните параметри на елемента.
4. Обединяване на крайните елементи за получаване на глобалната система (т.е. за общата задача) от алгебрични уравнения.
5. Налагане на граничните условия.
6. Решаване на уравненията.
7. Пресмятане на необходимите величини.

Тези стъпки на МКЕ го правят модулна техника, която може да бъде изпълнена на компютър, независимо от формата на областта и от граничните условия. В допълнение, методът позволява общото разглеждане на различни физични задачи, защото крайни елементи основаващи се на различни физични задачи могат да бъдат създадени лесно с една и съща компютърна програма.

В тази глава се разглеждат МКЕ модели на слоести композитни греди и плочи. Ще подчертаем, че всеки числен метод има смисъла да анализира инженерен проблем от практиката и анализът не е крайт като такъв а е по-скоро помощ при проектирането. Теорията и на аналитичните решения, представени в предишните глави, с цел да се разбере дълбоко поведението на проста слоеста структура от тип греда и плоча имат изключително голямо значение при численото моделиране в сложни задачи чрез МКЕ или произволен друг числен метод. Отчитането на компютърно получените резултати, правилните входни данни в компютърната програма и т.н. изискват добро разбиране на теорията на задачата, както и методът, на който се основава програмата.

5.2. Слоести греди в КТСП

5.2.1. Управляващи уравнения

Управляващото уравнението при огъване на симетрично композирана слоеста греда според класическата теория на слоестите плочи е ур. (3.8):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - b \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \hat{q} + \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \hat{I}_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} = 0$$

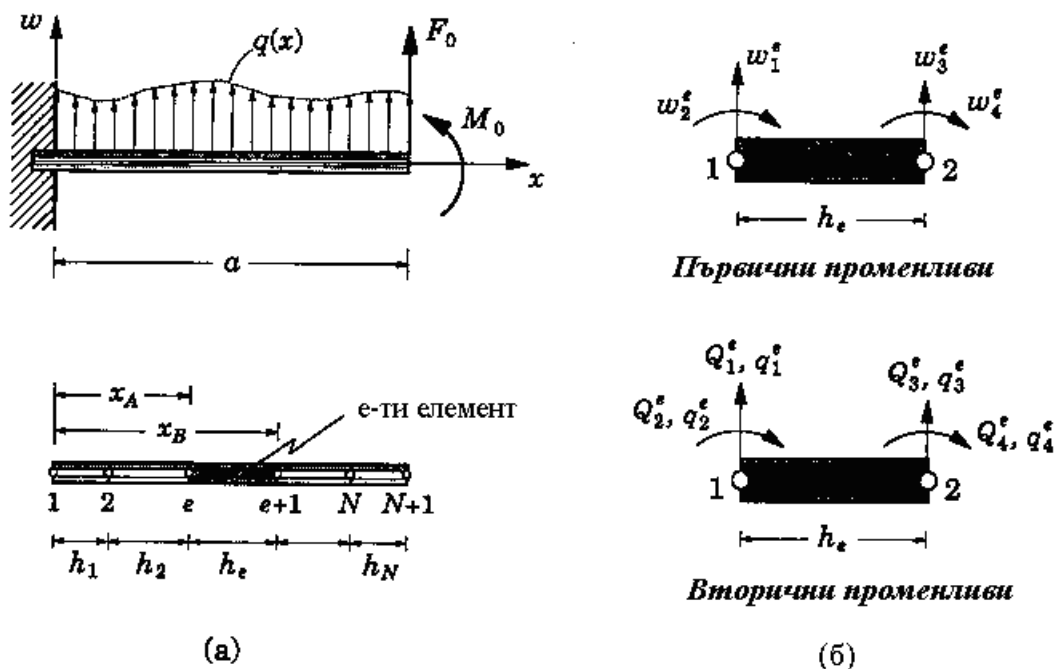
$$\hat{q} = bq, \quad \hat{I}_0 = bI_0, \quad \hat{I}_2 = bI_2 \tag{5.1}$$

където \hat{N}_{xx} е осовото натоварване, b е ширината на гредата, $q(x,t)$ е разпределеното напречно натоварване, и I_0 и I_2 са масовите инерционни моменти

$$I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz, \quad I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz$$

Следваме описаните в § II.5.1. стъпки:

Първо, областта на гредата $0 < x < L$ (Фиг.5.1) се разделя на множество от подобласти. Това улеснява точното представяне на геометрията, материалните свойства и решението само по себе си. Всяка подобласт, наречена *краен елемент на гредата*, и множеството от елементи представляващо цялата област се нарича *мрежа* на крайните елементи. Общите точки на елементите и краищата $x=0$ и $x=L$ се наричат *глобални възли* на мрежата. Типичен елемент на греда заема областта $x_A < x < x_B$ (Фиг.5.1а), където $x=x_A$ и $x=x_B$ са глобалните координати на краищата на типичния елемент. Всеки елемент може да има свои геометрични свойства: дължина $h_e \equiv x_B - x_A$, напречно сечение A_e и инерционен момент I_e ; както и свои материални свойства: $E_e, \hat{I}_0^e, \hat{I}_2^e$ и своя приложена сила: \bar{q}_e .



Фигура 5.1. Разделяне на крайни елементи: (а) Ивица от слоеста гредата; (б) Типичен краен елемент със степените на свобода за премествания и сили

Втора стъпка, типичният елемент се изолира от мрежата и се моделира неговото структурно поведение с помощта на вариационен метод. Тук ние използваме метода на Райлеф-Ритц с алгебрични полиноми за апроксимиращи функции и използваме слабата форма на управляващото уравнение, за да построим моделът от крайни елементи, който е множество от съотношения между преместванията на възлите и силите (т.е. първични и вторични променливи).

Когато една част от тялото е изолирана, трябва да се отчетат всички приложения и реактивни сили (Фиг.5.1б). Краищата $x=x_A$ и $x=x_B$ са възлите 1 и 2 на елемента. Обобщените сили Q_1^e и Q_3^e са напречните срязващи сили, а Q_2^e и

Q_i^e са огъващите моменти във възлите 1 и 2. Тъй като елементът е в равновесие във всеки момент време, то следва, че

$$Q_1^e + Q_3^e + \int_{x_A}^{x_B} \hat{q} dx = 0, \quad Q_2^e + Q_4^e - Q_3^e h_e - c \int_{x_A}^{x_B} \hat{q} x dx = 0$$

където c е част от h_e и нейната стойност зависи от натоварването. Тези съотношения се удовлетворяват автоматически, ако Q_i^e се определят с ур. (5.1).

5.2.2. Слаба форма

Слабата форма на ур. (5.1) за типичния елемент има вида:

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + b \hat{N}_{xx} \frac{dv}{dx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{I}_0 v \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \hat{I}_2 \frac{dv}{dx} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} - v \hat{q} \right] dx$$

$$- Q_1^e v(x_A) - Q_3^e v(x_B) - Q_2^e \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_A} - Q_4^e \left(-\frac{dv}{dx} \right)_{x_B} \quad (5.2a)$$

където $v(x)$ е тегловната функция и Q_i^e е свързано с напречното отместване $w_0(x, t)$ със съотношенията

$$Q_1^e(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - b \hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]_{x=x_A}$$

$$Q_3^e(t) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \hat{I}_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \right) - b \hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]_{x=x_B}$$

$$Q_2^e(t) = \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right]_{x=x_A}$$

$$Q_4^e(t) = - \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right]_{x=x_B} \quad (5.2b)$$

Отбелязваме от граничните условия, че отместването w_0 и ротацията $-\partial w_0 / \partial x$ са първични променливи на задачата и те трябва да бъдат непрекъснати във всяка точка на областта $0 < x < L$. Първичните променливи са обобщените премествания. Вторичните променливи са обобщените сили, определени в ур. (5.2b).

5.2.3. Полудискретен модел на краен елемент

Третата стъпка е да се построи модел на краен елемент, основаващ се на слабата форма (5.2a). При тази стъпка се използва метода на Файлеф-Ритц за определяне на $w_0(x, t)$. Поради това ние търсим апроксимация на w_0 върху елемента. Тъй като и w_0 и θ трябва да бъдат непрекъснати навсякъде в областта,

те следва да бъдат непрекъснати и на границата между всеки два елемента. Означаваме обобщените премествания на възлите 1 и 2 на елемента като

$$\begin{aligned} w_0(x_A, t) &= w_1^e(t), \quad \theta(x_A) \equiv -\frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = w_2^e(t) \\ w_0(x_B, t) &= w_3^e(t), \quad \theta(x_B) \equiv -\frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=x_B} = w_4^e(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

където w_1^e и w_3^e са напречните премествания и w_2^e и w_4^e са наклоните във възлите 1 и 2 (Фиг.5.1б). Тогава непрекъснатост на обобщените променливи на границите на елемента може да се изрази просто чрез приравняване на съответните стойности на контактуващите елементи при възела.

Да предположим, че търсим апроксимация на $w_0(x, t)$ във формата

$$w_0(x, t) \approx W^e(x, t) \equiv \sum_{j=1}^n w_j^e(t) \varphi_j^e(x) \quad (5.4)$$

където апроксимиращите функции $\varphi_j(x)$ трябва да бъдат такива, че да бъдат изпълнени следните изисквания

(1) $W^e(x, t)$ удовлетворява условията за краищата в ур. (5.3), т.е. да удовлетворяват геометричните условия в метода на Райлеф-Ритц.

(2) $W^e(x, t)$ има ненулеви първа и втора производни по отношение на x , както се изисква от слабата форма (5.2а) (т.е. условие за непрекъснатост).

(3) $\varphi_j(x)$ трябва да бъдат непрекъснати, линейно независими и множеството $\{\varphi_j\}$ да бъде пълно.

Удовлетворяването на първото изискване често води до удовлетворяване на второто. Третото свойство осигурява сходимост на решението чрез крайни елементи към истинското решение.

За да се удовлетворят четирите условия за краищата в ур. (5.3), трябва да се избере полином имащ четири коефициента, т.е. полином от трета степен.

$$W^e(x, t) = c_1^e(t) + c_2^e(t)x + c_3^e(t)x^2 + c_4^e(t)x^3 \quad (5.5)$$

който ясно удовлетворява изискванията за непрекъснатост и пълнота.

Параметрите c_i^e се определят така, че ур. (5.5) да удовлетворява условията за краищата. Заместваме в ур. (5.2а) и получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^4 \int_{x_A}^{x_B} \left[\left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} + b \hat{N}_{xx} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) w_j^e \right. \\ &+ \left. \left(\hat{I}_0 \varphi_i \varphi_j + \hat{I}_2 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) \frac{d^2 w_j^e}{dt^2} - \varphi_i \hat{q} \right] dx - Q_1^e \varphi_i(x_A) - Q_3^e \varphi_i(x_B) \\ &- Q_2^e \left(-\frac{d\varphi_i}{dx} \right)_{x_A} - Q_4^e \left(-\frac{d\varphi_i}{dx} \right)_{x_B} \equiv \sum_{j=1}^4 \left[\left(K_{ij}^e + G_{ij}^e \right) w_j^e + M_{ij}^e \frac{d^2 w_j^e}{dt^2} \right] - F_i^e \end{aligned} \quad (5.6)$$

където

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^e &= \int_{x_A}^{x_B} E_{xx}^b I_{vv} \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dx^2} dx & G_{ij}^e &= \int_{x_A}^{x_B} b \hat{N}_{xx} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx \\
 M_{ij}^e &= \int_{x_A}^{x_B} \left(\hat{I}_0 \varphi_i \varphi_j + \hat{I}_2 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} \right) dx & q_i^e &= \int_{x_A}^{x_B} \varphi_i \hat{q} dx \\
 F_i^e &= q_i^e + Q_1^e \varphi_i(x_A) + Q_3^e \varphi_i(x_B) + Q_2^e \left(-\frac{d\varphi_i}{dx} \right)_{x_A} + Q_4^e \left(-\frac{d\varphi_i}{dx} \right)_{x_B}
 \end{aligned}$$

Ур. (5.6) може да бъде записано в матрична форма

$$([K^e] + [G^e]) \{w^e\} + [M^e] \{\bar{w}^e\} = \{F^e\}, \quad t > 0 \quad (5.7)$$

където $[K^e]$ е матрицата на коравината, $[G^e]$ е матрицата на геометричната коравина, $[M^e]$ е матрицата на масата, и $\{F^e\}$ е векторът на силите. Всички матрици са симетрични. Предвид на следните свойства на апроксимиращите функции $\varphi_j^e(x)$:

$$\varphi_{2i-1}^e(\bar{x}_j) = \delta_{ij}, \quad \varphi_{2i}^e(\bar{x}_j) = 0, \quad \frac{d\varphi_{2i-1}^e}{dx} \Big|_{\bar{x}_j} = 0, \quad \frac{d\varphi_{2i}^e}{dx} \Big|_{\bar{x}_j} = \delta_{ij} \quad (5.8)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

обобщените сили могат да се запишат като

$$F_i^e = q_i^e + Q_i^e \quad (5.9)$$

които се определят от силите q_i^e във възлите в зависимост от разпределеното натоварване \hat{q} и от реакциите Q_i^e във възлите. Последните не са известни предварително.

Ур. (5.7) се нарича *полудискретен модел на крайни елементи*, защото представлява само пространствена апроксимация на решението. Системата от обикновени диференциални ур. (5.7) трябва да бъде редуцирана по-нататък до алгебрични уравнения в смисъл на апроксимираща схема по времето, за да бъде завършено изцяло дискретизирането.

Например, когато геометричните и материалните свойства са постоянни за елемента, за матриците $[K^e]$, $[G^e]$ и $[M^e]$ и за силите q_i^e имаме

$$\begin{aligned}
[K^e] &= \frac{2E_{xx}^e I_{yy}^e}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix}, \quad \{q^e\} = \frac{q_0^e h_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} \\
[M^e] &= \frac{\hat{I}_0^e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ -13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix} + \frac{\hat{I}_2^e}{30h_e} [H^e] \\
[H^e] &= \begin{bmatrix} 36 & -3h_e & -36 & -3h_e \\ -3h_e & 4h_e^2 & 3h_e & -h_e^2 \\ -36 & 3h_e & 36 & 3h_e \\ -3h_e & -h_e^2 & 3h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix}, \quad [G^e] = \frac{b_e \hat{N}_{xx}^e}{30h_e} [H^e]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Когато разглеждаме *статично* огъване си приложени напречно натоварване \hat{q} и осово натоварване \hat{N}_{xx} , всички променливи са функции само на позицията, членът с производна по времето се пропуска и ур. (5.7) приема вида

$$([K^e] - N_{xx}^0 [\bar{G}^e]) \{w^e\} = \{Q^e\} \tag{5.11}$$

където $[\bar{G}^e]$ е същото като $[G^e]$, но в израза в ур. (5.6) е пропуснато \hat{N}_{xx} .

В случай на натурални вибрации на гредата се предполага, че $\hat{N}_{xx} = 0$ и стойностите $w_j^e(t)$ и силите на реакция са периодични функции по времето

$$w_j^e(t) = W_j^e e^{-i\omega t}, \quad Q_j^e(t) = \bar{Q}_j^e e^{-i\omega t} \tag{5.12}$$

Тогав ур. (5.7) се редуцира до

$$([K^e] - \omega^2 [M^e]) \{W^e\} = \{\bar{Q}^e\} \tag{5.13}$$

Ще отбележим, че задачата за натурални вибрации е задача за собствените стойности, в която трябва да се определят собствените стойности λ така, че

$$([A] - \lambda[B]) \{W\} = \{0\}$$

за всяко ненулево $\{W\}$.

5.2.4. Дискретизация по времето

В динамичния случай реакцията на гредата зависи от времето, ур. (5.7) е уравнение на движението и, за да се определят стойностите $w_j^e(t)$ във възлите, трябва да се интегрира по времето. Матричното ур. (5.7) може да се реши чрез трансформация на Лаплас при някои видове натоварвания, но това е тежка процедура и изисква много повече усилия отколкото, ако се използва числена схема за интегриране по времето. Тук както и изобщо в структурната динамика се ползва интеграционната схема на Неймарк.

В метода на Неймарк първата и втората производни по времето се апроксимират с функциите

$$\begin{aligned} \{\dot{w}^e\}_{s+1} &= \{\dot{w}^e\}_s + a_1\{\ddot{w}^e\}_s + a_2\{\ddot{w}^e\}_{s+1} \\ \{\ddot{w}^e\}_{s+1} &= a_3(\{w^e\}_{s+1} - \{w^e\}_s) - a_4\{\dot{w}^e\}_s - a_5\{\ddot{w}^e\}_s \end{aligned} \quad (5.14)$$

където

$$\begin{aligned} \Delta t_s &= t_{s+1} - t_s, \quad a_1 = (1 - \alpha)\Delta t_s, \quad a_2 = \alpha\Delta t_s, \\ a_3 &= \frac{2}{\gamma(\Delta t_s)^2}, \quad a_4 = \Delta t_s a_3, \quad a_5 = \frac{(1 - \gamma)}{\gamma} \end{aligned}$$

Параметрите α и γ в схемата на Неймарк са избрани така, че тя да бъде или устойчива или условно устойчива; т.е. грешката при апроксимацията на времето да не расте неограничено с нарастването на времето. Схемите, при които $\gamma \geq \alpha \geq 1/2$ са безусловно устойчиви. Схемите, за които $\gamma < \alpha$ и $\alpha \geq 1/2$, са условно устойчиви и условието за устойчивост е

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} \equiv \left[\frac{1}{2} \omega_{max} (\alpha - \gamma) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

където ω_{max} е максималната честота според ур. (5.14).

Умножавайки второто от ур. (5.14) с $[M^e]_{s+1}$ и използвайки ур. (5.7) при $t = t_{s+1}$, за да заместим $[M^e]_{s+1}\{w^e\}_{s+1}$, получаваме

$$\begin{aligned} [\hat{K}^e]\{w^e\}_{s+1} &= \{\hat{F}^e\} \\ [\hat{K}^e] &= ([K^e]_{s+1} + [G^e]_{s+1}) + a_3[M^e]_{s+1} \\ \{\hat{F}^e\} &= \{F^e\}_{s+1} + [M^e]_{s+1}(a_3\{w^e\}_s + a_4\{\dot{w}^e\}_s + a_5\{\ddot{w}^e\}_s) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ур. (5.16) представлява система алгебрични уравнения спрямо дискретните стойности на $\{w^e(t)\}$ в момента $t = t_{s+1}$ в смисъл на известни стойности в момента $t = t_s$. При първата стъпка (т.е. $s = 0$) стойностите $\{w^e\}_0 = \{w^e(0)\}$ и $\{\dot{w}^e\}_0 = \{\dot{w}^e(0)\}$ са известни от началните условия на задачата и ур. (5.7) се използва, за да се определи $\{\ddot{w}^e\}_0$ при $t = 0$:

$$\{\ddot{w}^e\}_0 = [M^e]^{-1} \{ \{F^e\} - ([K^e] + [G^e]) \{w^e\}_0 \} \quad (5.17)$$

Една експлицитна (пряка) схема за интегриране по времето поражда система от алгебрични уравнение във вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

която може да се реши без обръщането на матрицата $[A]$. Очевидно, една диагонална матрица от коефициенти ще изпълнява това изискване. Ако схемата води до система уравнения от вида $[A]\{x\} = \{b\}$, чието решение може да бъде намерено само чрез обръщане на матрицата $[A]$, се нарича имплицитна (косвена). От ур. (5.16) се вижда, че матриците $[\hat{K}]$ (или $[\bar{K}]$) са симетрични, но не са диагонални. Затова тук използваме имплицитни схеми. За намаляване на времето за пресмятане при решаването общите уравнения свързани с ур. (5.16), масовата матрица може да бъде диагонализирана в някакъв рационален смисъл, например, разделяйки общата маса на елемента равномерно на възлите на елемента.

5.2.5. Обединяване на уравненията на елементите

До сега бяха получени уравненията за отделен краен елемент. Уравнения (5.11), (5.14) или (3.16) не могат да бъдат решени на ниво един елемент, защото има осем неизвестни (w_j^e и Q_j^e) а само за четирите уравнения. Това съответства и на факта, че уравненията за отделният елемент не могат да се решат независимо от общата задача. За да получим точно толкова на брой уравнения колкото са неизвестните в дадена задача, е необходимо да бъдат обединени уравненията на отделните елементи по смислен начин. Събирането на всички елементи в мрежа от крайни елементи се основава на непрекъснатост на първичните променливи на съседните елементи и равновесие на вторичните елементи. Ако една греда е разделена на N елемента, тя ще има $N+1$ възела, в това число $N-1$ вътрешни възела. Следователно, има $2(N-1)$ уравнения от вътрешните възли и две уравнения от всеки от крайните възли (възли 1 и $N+1$) и общо $2(N+1)$ уравнения. Предвид условията за равновесие, обобщените сили при вътрешните възли са заменени с известни приложени сили. Обобщените сили за възли 1 и $N+1$ остават част от общите $2(N+1)$ уравнения. Освен това има $2(N+1)$ обобщени премествания. Така общият брой на неизвестните е $2(N+1)+4$, а броят на уравненията е $2(N+1)$. Допълнителните четири уравнения се дават от четирите гранични условия на задачата. Граничните условия уточняват или обобщените премествания или съответните обобщени сили, но никога и двете заедно от една и съща двойка.

В случая, когато разглеждаме статично огъване и мрежа от три крайни елемента, общите уравнения са

$$[K]\{U\} = \{F\} \tag{5.18}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{34}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & 0 & 0 \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{44}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} + K_{21}^{(3)} & K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \\ q_3^{(1)} + q_1^{(2)} \\ q_4^{(1)} + q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} + q_1^{(3)} \\ q_4^{(2)} + q_2^{(3)} \\ q_3^{(3)} \\ q_4^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^{(1)} \\ Q_2^{(1)} \\ Q_3^{(1)} + Q_1^{(2)} \\ Q_4^{(1)} + Q_2^{(2)} \\ Q_3^{(2)} + Q_1^{(3)} \\ Q_4^{(2)} + Q_2^{(3)} \\ Q_3^{(3)} \\ Q_4^{(3)} \end{Bmatrix}$$

където U_I ($I=1,2,\dots,8$) са обобщените премествания отнесени към глобалните възли. J -тият глобален възел ще има U_{2J-1} за напречно преместване и U_{2J} за ротация.

5.3. Теория на Тимошенко за слоеста греда

5.3.1. Полудискретизиран МКЕ модел

Управляващите уравнения за симетрични слоести греди в теорията на Тимошенко са

$$KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + b \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \hat{q} = \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$$

$$E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = \hat{I}_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$\hat{q} = bq, \quad \hat{I}_0 = bI_0, \quad \hat{I}_2 = bI_2 \quad (5.18)$$

Разделяме цялата греда на множество от крайни елементи, изолираме един типичен краен елемент, построяваме слаби форми на ур. (5.18) върху типичния елемент, правим интерполиране на първичните променливи и построяваме моделът на крайните елементи.

Слабите форми на ур. (5.18) както за цялата област $0 < x < L$ така и за участъка $x_A < x < x_B$ за отделен краен елемент, за да се получат по метода на Райлеф-Ритц:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{x_A}^{x_B} \left[KG_{xx}^b bh \frac{dv_1}{dx} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) + b\hat{N}_{xx} \frac{dv_1}{dx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_1 \hat{I}_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - v_1 \hat{q} \right] dx \\
&\quad - Q_1^e v_1(x_A) - Q_3^e v_1(x_B) \\
0 &= \int_{x_A}^{x_B} \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{dv_2}{dx} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + KG_{xx}^b bh v_2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) + \hat{I}_2 v_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \right] dx \\
&\quad - Q_2^e v_2(x_A) - Q_4^e v_2(x_B)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

където v_1 и v_2 са тегловни функции, които имат същото значение както при класическия краен елемент за греда ур. (5.2), но тяхното отношение към напречното отместване и ротация w_0 и ϕ_x е различно:

$$\begin{aligned}
Q_1^e(t) &= - \left[KG_{xx}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) + b\hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]_{x=x_A} \\
Q_3^e(t) &= \left[KG_{xx}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) + b\hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]_{x=x_B} \\
Q_2^e(t) &= - \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right]_{x=x_A} \\
Q_4^e(t) &= \left[E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right]_{x=x_B}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Полудискретен МКЕ модел. От слабата форма е ясно, че $w_0(x,t)$ и $\phi_x(x,t)$ са първични променливи и трябва да бъдат разглеждани като променливи на възлите. Приемаме, че

$$\begin{aligned}
w_0(x_A, t) &= w_1^e(t), \quad w_0(x_B, t) = w_2^e(t) \\
\phi_x(x_A, t) &= \Phi_1^e(t), \quad \phi_x(x_B, t) = \Phi_2^e(t)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

където w_1^e и w_2^e представляват напречните отмествания и Φ_1^e и Φ_2^e означават ротациите въ възли 1 и 2. Така всяко w_0 и ϕ_x трябва да удовлетворява условията на краищата в (5.3) и да бъде непрекъснато с ненулеви първи производни. Полином от първа степен удовлетворява тези изисквания, т.е.

$$w_0(x, t) \approx a_1 + a_2 x, \quad \phi_x(x, t) \approx b_1 + b_2 x \tag{5.22}$$

От физична гледна точка, този избор може да не е логичен, защото отместването е функция от по-висока степен отколкото ротацията.

Чрез ур. (5.21) и (5.22) параметрите a_1, a_2, b_1, b_2 се изразяват чрез стойностите на w_0, ϕ_x за възлите

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{w_1^e x_B - w_2^e x_A}{x_B - x_A}, \quad a_2 = \frac{w_2^e - w_1^e}{x_B - x_A} \\
b_1 &= \frac{\Phi_1^e x_B - \Phi_2^e x_A}{x_B - x_A}, \quad b_2 = \frac{\Phi_2^e - \Phi_1^e}{x_B - x_A}
\end{aligned}$$

което дава апроксимацията

$$\begin{aligned} w^e(x, t) &\approx w_1^e(t)\psi_1^e(x) + w_2^e(t)\psi_2^e(x) \\ \phi^e(x, t) &\approx \Phi_1^e(t)\psi_1^e(x) + \Phi_2^e(t)\psi_2^e(x) \end{aligned} \quad (5.23a)$$

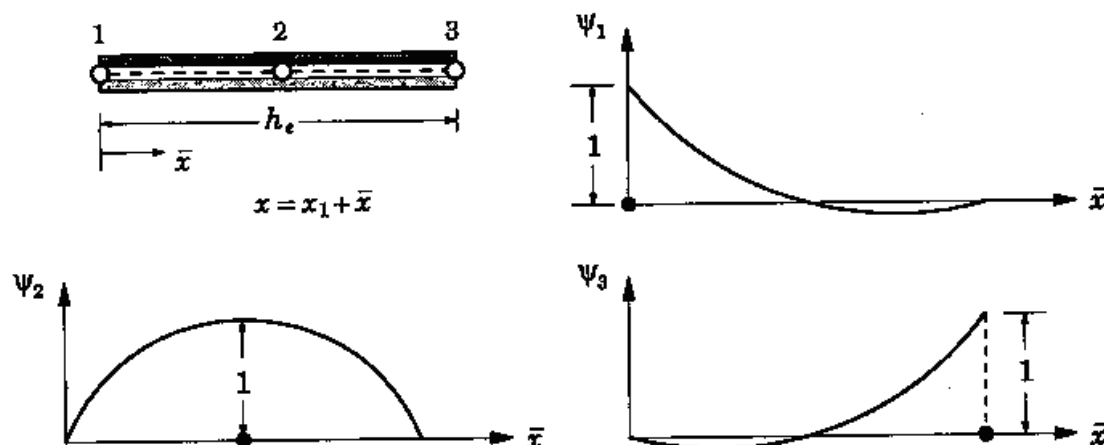
или

$$\psi_1^e(x) = \frac{x_B - x}{x_B - x_A}, \quad \psi_2^e(x) = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad (5.23b)$$

$\psi_i^e(x)$ се наричат *интерполационни функции на Лагранж*, които се получават чрез интерполиране само на функцията, но не и на нейните производни във възлите. Интерполационните функции на Лагранж имат следните свойства:

$$\psi_j^e(x_i) = \delta_{ij}, \quad \sum_{j=1}^n \psi_j^e(x) = 1$$

където x_i са координатите на i -тия възел.



Фигура 5.2. Елемент на Лагранж и интерполационни функции

Изобщо не е необходимо w_0 и ϕ_x да бъдат апроксимирани с полиноми от една и съща степен, но w_0 трябва да бъде апроксимирано с полином от същата или по-висока степен от тази за ϕ_x . Предполагаме, че

$$w_0(x, t) = \sum_{j=1}^m w_j^e(t)\psi_j^e(x), \quad \phi_x(x, t) = \sum_{j=1}^n \Phi_j^e(t)\Theta_j^e(x), \quad m \geq n \quad (5.24)$$

където $\psi_j^e(x)$ и $\Theta_j^e(x)$ са интерполационните функции на Лагранж от степен $(m-1)$ и $(n-1)$ съответно. Полагайки (5.24) за w_0 и ϕ_x и $v_1 = \psi_i^e$ и $v_2 = \Theta_j^e$ във слабите форми (5.19) дава полудискретния модел на крайни елементи

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [G] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] \\ [0] & [M^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{w}\} \\ \{\dot{\Phi}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.25a)$$

където

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{11} &= \int_{x_A}^{x_B} K G_{xx}^b b h \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx, \quad G_{ij}^e = \int_{x_A}^{x_B} b \hat{N}_{xx} \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \\
 K_{ij}^{12} &= \int_{x_A}^{x_B} K G_{xx}^b b h \frac{d\psi_i}{dx} \Theta_j dx \\
 K_{ij}^{22} &= \int_{x_A}^{x_B} \left(E_{xx}^b I_{yy} \frac{d\Theta_i}{dx} \frac{d\Theta_j}{dx} + K G_{xx}^b b h \Theta_i \Theta_j \right) dx \\
 M_{ij}^{11} &= \int_{x_A}^{x_B} \hat{I}_0 \psi_i \psi_j dx, \quad M_{ij}^{22} = \int_{x_A}^{x_B} \hat{I}_2 \Theta_i \Theta_j dx \\
 F_i^1 &= \int_{x_A}^{x_B} \psi_i \hat{q} dx + Q_1^e \psi_i(x_A) + Q_3^e \psi_i(x_B) \\
 F_i^2 &= Q_2^e \Theta_i(x_A) + Q_4^e \Theta_i(x_B)
 \end{aligned} \tag{5.256}$$

Когато и w_0 и ϕ_x се апроксимират с линейни интерполационни функции, елементът става много корав за ограничения на тънка греда. Такова поведение е известно като *срязващо блокиране*. За преодоляване на това блокиране в изследванията тук се използва едно и също интерполиране за w_0 и ϕ_x и за срязващата деформация $\gamma_{xx} = (dw_0/dx) + \phi_x$ се използва полином от по-ниска степен. (квадратична интерполация за w_0 и линейна интерполация за ϕ_x).

5.3.2. Напълно дискретизирани МКЕ модели

Огъване. За статичен анализ ур. (5.25) приема вида

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [G] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \tag{5.26}$$

които могат да бъдат обединени и решени след поставяне на гранични условия на задачата. В ур. (5.26) е предположено, че \bar{N}_{xx} във формулата на G_{ij}^e е определено.

Натурални вибрации. За натурално вибриране ур. (5.25) приема вида

$$\left(\begin{bmatrix} [K^{11}] + [G] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] \\ [0] & [M^{22}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\Phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\bar{F}^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \tag{5.27}$$

където ω е натуралната честота на вибриране. Отсъствието на ротационната инерция $[M^{22}] = [0]$ не опростява задачата, а усложнява анализа. Затова в настоящите изследвания ротационната инерция е включена в анализа чрез крайни елементи.

Динамичен анализ. В случай на динамичен анализ, ур. (5.25) се редуцира до система алгебрични уравнения като се прилага апроксимация по времето. Тъй като общата форма на ур. (5.25) е същата като ур. (5.7), всички разглеждания в параграф 5.2.3 са валидни и тук. Напълно дискретизираният модел за динамичен анализ се дава чрез

$$[\hat{K}^e]\{\Delta^e\}_{s+1} = \{\hat{F}^e\} \quad (5.28a)$$

$$\begin{aligned} [\hat{K}^e] &= ([K^e]_{s+1} + [G^e]_{s+1}) + a_3[M^e]_{s+1} \\ \{\hat{F}^e\} &= \{F^e\}_{s+1} + [M^e]_{s+1} (a_3\{\Delta^e\}_s + a_4\{\dot{\Delta}^e\}_s + a_5\{\ddot{\Delta}^e\}_s) \end{aligned} \quad (5.28b)$$

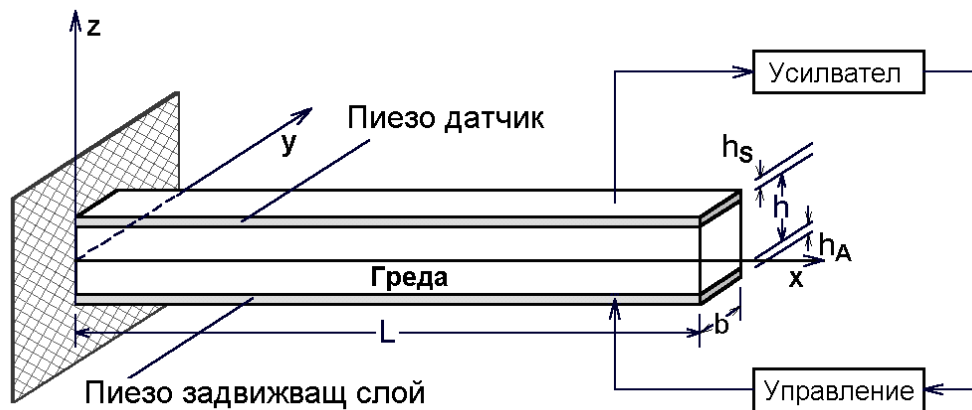
$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix}, \quad \{\Delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{w^e\} \\ \{\Phi^e\} \end{Bmatrix}, \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (5.28b)$$

Въпреки че крайният елемент за гредата на Тимошенко е еднаква интерполация за w_0 и ϕ може да се получи и по Класическата теория за греди и теорията за гредата на Тимошенко, класическата теория за греди е по-точна при предвиждането на решението за много тънки греди ($a/h \gg 100$). Квадратният елемент за гредата на Тимошенко е точен и надежден и за дебели ($a/h \leq 100$) и за тънки $a/h > 100$ греди.

5.3.3. МКЕ модел на гредата с два симетрично разположени пиезоелектрически слоя

В този параграф се разглежда модел на крайни елементи за анализ на слоеста гредата с два симетрично разположени пиезоелектрически слоя, играещи роля на датчик и управляващо устройство.

Разглеждаме тънка гредата с правоъгълно сечение имаща дължина L , ширина b и дебелина h . Двойка пиезоелектрически слоя с дебелина h_s и h_a са залепени симетрично на горната и долната повърхности на гредата (Фиг.5.3). Горният слой действа като датчик, а долният слой действа като управляващо устройство.



Фигура. 5.3. Слоеста гредата с пиезоелектрически слоеве

Уравнения на пиезоелектрическия слой. Конструктивните съотношения за пиезоелектрическия материал се дават с уравненията

$$\{\sigma\} = [Q] \left(\{\varepsilon\} - [d]^T \{E\} \right), \quad (5.29)$$

$$\{D\} = [d][Q]\{\varepsilon\} + [\xi]\{E\}, \quad (5.30)$$

където $\{\sigma\}$ е тензорът на напреженията, $\{\varepsilon\}$ е тензорът на деформациите, $\{D\}$ е векторът на електрическите премествания, $\{E\}$ е векторът на електрическото поле, $[Q]$ е матрицата на коравината, $[d]$ е матрицата на пиезоелектрическите константи и $[\xi]$ е матрицата на диелектрическите константи. Уравнение (5.29) описва обратния пиезоелектрически ефект, а уравнение (5.30) – директния пиезоелектрически ефект.

За да се получат основните уравнения за пиезоелектрическите датчици и управляващи устройства, приемаме, че те са залепени перфектно върху основната гредка и са много по-тънки от нея. Също така приемаме, че пиезоелектрическият материал е поляризиран в z направление и проявява изотропни свойства в напречно направление в xy -равнината. При тези предположения системата уравнения (5.29) и (II.5.30) се редуцират в следния вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} d_{31} \\ 0 \end{bmatrix} E_z \right) \quad (5.31)$$

$$D_z = Q_{11} d_{31} \varepsilon_x + \xi_{33} E_z. \quad (5.32)$$

Интензивността на електрическото поле E_x може да се изрази като

$$E_z = \frac{V_l}{h_l} \quad (5.33)$$

където V_l е приложеното напрежение върху l -тия слой имащ дебелина h_l .

Уравнение на датчиците. Директният пиезоелектрически ефект ур. (5.32) се използва за пресмятане на силата на електричеството, породено от деформациите в гредката. Тъй като няма електрическо поле приложено към слоя на датчика, се получава

$$D_z = Q_{11} d_{31} \varepsilon_x. \quad (5.34)$$

Силата на тока измерена между електродите на сензора се дава с интеграла

$$q(t) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\int_{S_{ef}} D_z dS \right)_{z=h/2} + \left(\int_{S_{ef}} D_z dS \right)_{z=h/2+h_s} \right\} \quad (5.35)$$

където where S_{ef} е ефективната повърхност на електрода на слоя на датчика.

Токът върху повърхността на датчика се дава с формулата

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (5.36)$$

Токът се превръща в напрежение с формулата

$$V^s = G_s i(t). \quad (5.37)$$

където G_s е константата на токовия усилвател.

Уравнения на движението за гредата. Предполагаме, че осите на централна симетрия и на симетрия на материалните константи на гредата съвпадат с x оста, така че няма обединено огъване с усукване. Осовата вибрация на централната линия на гредата се предполага пренебрежима и полето на преместванията $\{u\}$ се подчинява на теорията на Тимошенко за греди, т.е.

$$\begin{aligned} u_1(\chi, y, z) &\approx z\psi(\chi, t), \\ u_2(\chi, y, z) &\approx 0, \\ u_3(\chi, y, z) &\approx w(\chi, t), \end{aligned} \quad (5.37)$$

където ψ е ротацията на напречното сечение на гредата около положителната посока на y -оста и w е напречното преместване на точка от централната ос ($y = z = 0$).

Съотношенията между деформациите и напреженията се определят по следния начин:

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \psi + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (5.38)$$

В разглеждания случай ротацията ψ е отрицателното отклонение $\psi = \partial w / \partial x$, така че напречната срязваща деформация е равна на нула $\gamma_{xz} = 0$.

За да получим уравненията на движение за гредата, използваме принципа на Хамилтон:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (5.39)$$

където δ е първата вариация, T е кинетичната енергия, U е потенциалната енергия и W е работата, извършена от външните натоварвания и моменти.

Кинетичната енергия W се дава с формулата

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} dV = \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2-h_A}^{h/2+h_S} \rho \left[(z\dot{\psi})^2 + \dot{w}^2 \right] dz dx \quad (5.40)$$

Потенциалната енергия от деформации се дава във вида

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \\ &= \frac{b}{2} \int_0^L \int_{-h/2-h_A}^{h/2+h_S} \left[Q_{11} \left(z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + Q_{55} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dz dx \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ако външното натоварване се състои само от моментите, породени от пиезоелектрическите управляващи устройства, тъй като структурата не е

подложена на общо огъване с усукване, първата вариация на работата приема вида

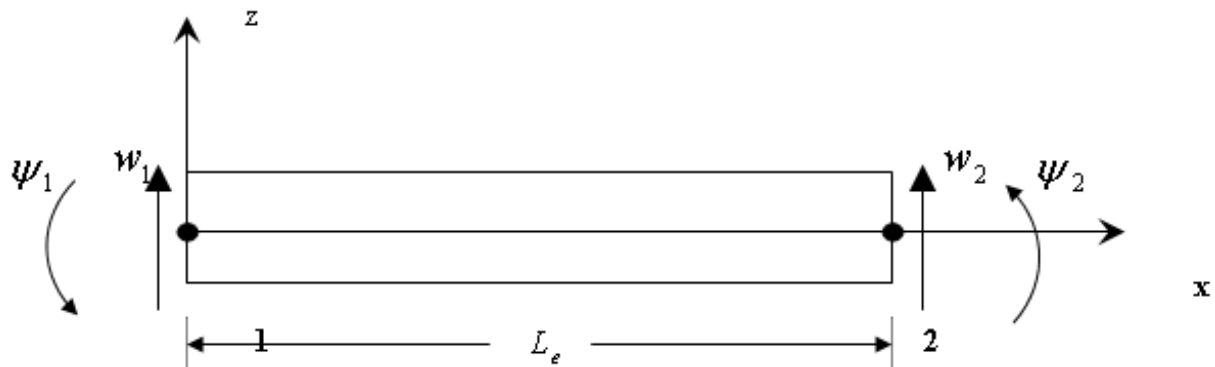
$$\delta W = b \int_0^L M^A \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \quad (5.42)$$

Където M^A е моментът за единица дължина, породен от управляващия слой и е

$$M^A = \int_{-h/2}^{-h/2-h_A} z \sigma_x^A dz = \int_{-h/2}^{-h/2-h_A} z Q_{11} d_{31} E_z^A dz \quad \text{и} \quad E_z^A = \frac{V_A}{h_A} \quad (5.43)$$

Формулировка чрез МКЕ. Нека разгледаме краен елемент от гредата с дължина L_e , който има две степени на свобода (с.с.) за всеки от възлите – една напречна w_1 (w_2) по направление z и една ротационна ψ_1 (ψ_2) (Фиг.5.3). Векторът на променливите във възлите за елемента дефинираме като

$$X^e = [w_1 \quad \psi_1 \quad w_2 \quad \psi_2]^T \quad (5.44)$$



Фигура 5.3. Краен елемент от гредата

Напречното преместване и ротацията на елемента апроксимираме по следния начин

$$w(\chi, t) = \sum_{i=1}^4 H_i^w(\chi) X_i^e(t) \quad (5.45)$$

$$\psi(\chi, t) = \sum_{i=1}^4 H_i^\psi(\chi) X_i^e(t) \quad (5.46)$$

където (H_i^w, H_i^ψ) са линейните функции на апроксимация.

$$H(r) = \left[H_1(r), H_2(r), H_3(r), H_4(r) \right]^T$$

$$H_1(r) = 1 - 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3$$

$$H_2(r) = L_e \left[\left(\frac{r}{L_e}\right) - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right]$$

$$H_3(r) = 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3$$

$$H_4(r) = L_e \left[-\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right]$$

Замествайки ур. (5.45) и (5.46) в ур. (5.39), получаваме уравнението на движение за крайния елемент на гредата за променливите на възлите както следва:

$$\left[M^e \right] \ddot{X}^e(t) + \left[K^e \right] X^e(t) = F_{ext}^e(t) \quad (5.47)$$

Където $[M^e]$ и $[K^e]$ матриците на масата и на коравината на елемента, образувани от масите и коравините на двата пиезоелектрически слоя и от масата на основната греда, и $F_{ext}^e(t)$ е векторът на външните натоварвания, определен от приложеното напрежение към пиезоелектрическия управляващ слой, и е пропорционален на това напрежение. Неизвестният потенциал на датчика е пропорционален на механичните с.с. X^e .

Обединявайки уравненията за отделните крайни елементи получаваме уравнението на движение на цялата греда

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F_m + F_e \quad (5.48)$$

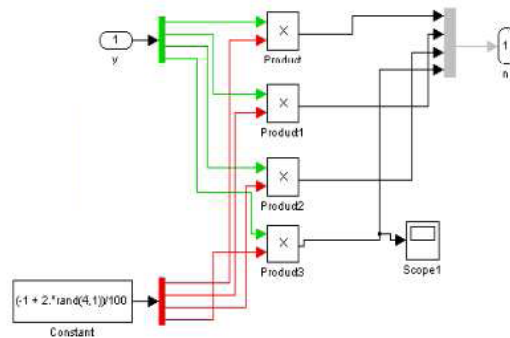
където векторът X съдържа състоянията на структурата (вертикалните премествания и ротациите на възлите). M е обобщената матрица на масата, образувана от матриците на масата на отделните елементи, K е обобщената матрица на коравината, F^m е векторът на обобщените концентрирани механични сили, добавен в следствие към дискретизираната система, F^e е векторът на обобщеното електрическо натоварване подавано чрез и пропорционално на приложеното напрежение. С D е означена матрицата на вискозния дампинг, също добавена в следствие, и \ddot{X} е ускорението, а \dot{X} е скоростта. Системата обикновени диференциални уравнения от втори ред (4.1) може да се запише във следната пространствена форма

$$\dot{x} = Ax + Bu + F, \quad y = Cx \quad (5.49)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F_m \end{bmatrix}$$

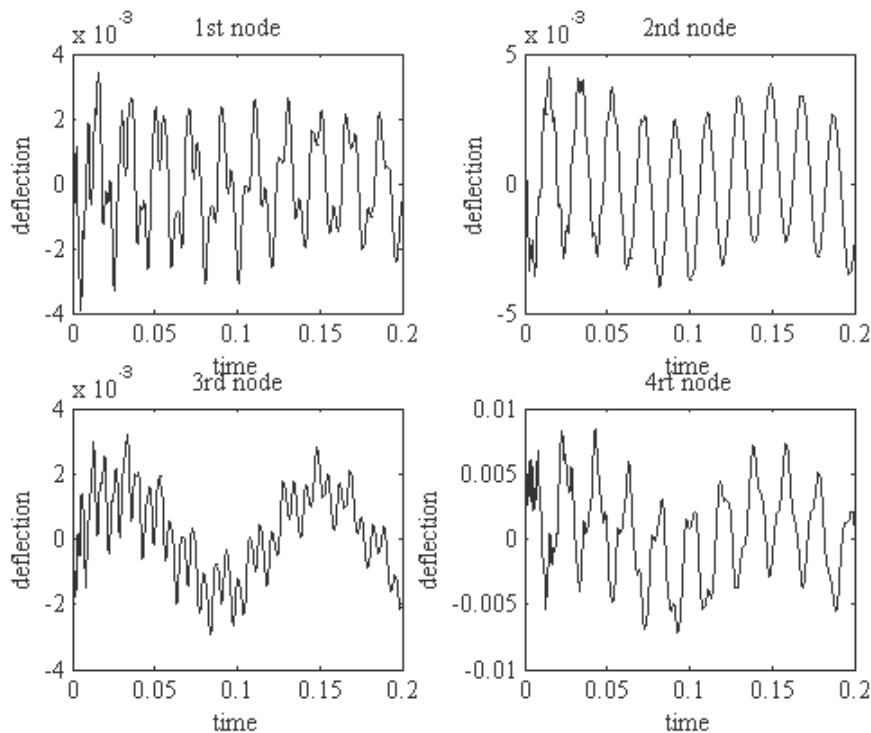
където $x^T [X^T \quad \dot{X}^T]$ е векторът на състоянията, A е системната матрица, F_e^* е подаваното напрежение, образуваното чрез информацията от пиезоелектрическия датчик. Управляващият вход u е вектор-стълб, образуван от напреженията, приложени чрез пиезоелектрическия управляващ слой. Всеки стълб от входната матрица B представлява подаденото натоварване от

пиезоелектрическият слой за единица напрежение. Векторът на смущенията F въздействието на механичното натоварване F^m върху отделните състояния. Векторът y при изхода от измерванията на пиезоелектрическият слой-датчик се определя от вектора на състоянията x чрез матрицата C на изхода. Модел на гредата с четири крайни елемента, реализиран на SIMULINK, е представен на Фиг.5.4.

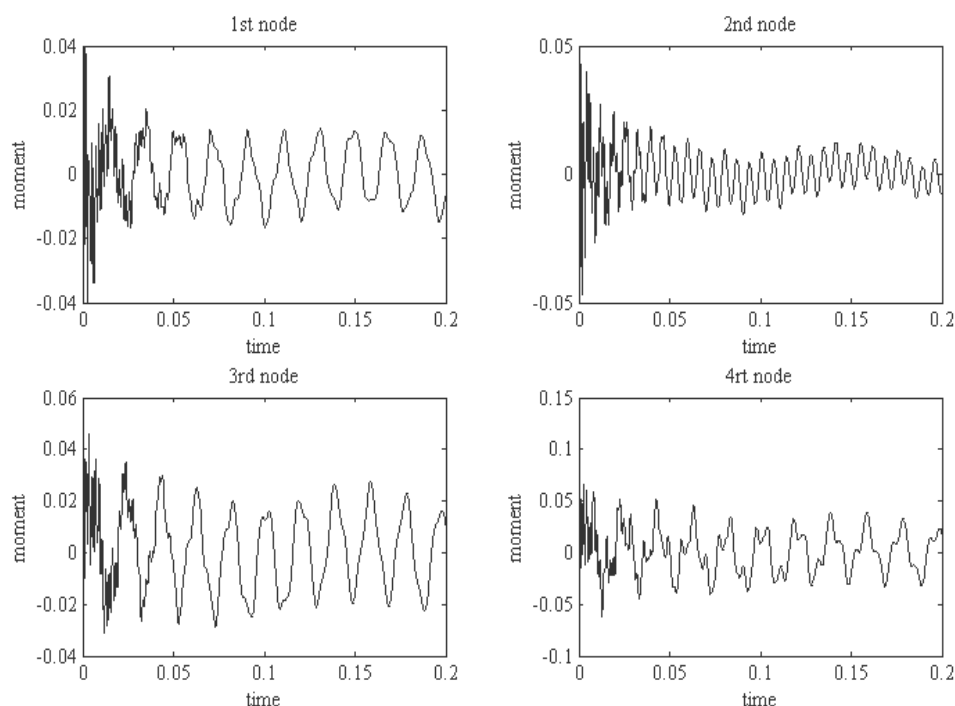


Фигура 5.4. Модел на динамиката на композитна гредата (четири крайни елемента)

На фигури 5.5 и 5.6 са представени графики свободните премесване във вертикална посока и на завъртанията на възлите на гредата.



Фигура 5.5. Свободно вертикално отмесване при натоварена гредата.



Фигура 5.6. Свободно вертикално огъване при натоварена греда

Построеният в този параграф МКС модел в пространството на състоянията ще се използва по-късно в настоящия труд за определяне на закона на управление и за анализ на качеството при различни оптимални алгоритми за управление.

5.4. МКЕ модели за слоести плочи (класическа теория)

5.4.1. Слаби форми

В тази част ще построим МКЕ модели на уравненията на движението на слоести плочи в рамките на КТСП. Ще използваме ур. (2.18) за напреженията. Умножавайки ур (2.18) с δu_0 , δv_0 и δw_0 съответно и интегрирайки по областта на крайния елемент, получаваме

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Omega^e} \delta w_0 \left[-\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
 0 &= \int_{\Omega^e} \delta v_0 \left[-\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega^*} \delta w_0 \left[-\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - q \right. \\
- \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
\left. + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy
\end{aligned}$$

където \hat{N}_{xx} , \hat{N}_{xy} и \hat{N}_{yy} са равнинните сили на ръбовете. Резултантите на напреженията и моментите N_{xx} , M_{xx} и т.н. са известни като функции на преместванията (u_0, v_0, w_0) от ур. (2.29). Ще отбележим, че виртуалните премествания $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0)$ играят ролята на тегловни функции при построяването на слабите форми. Интегрирането по части дава

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega^*} \left[\frac{\partial \delta u_0}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} N_{xy} + I_0 \delta u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \delta u_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
- \oint_{\Gamma^*} (N_{xx} n_x + N_{xy} n_y) \delta u_0 ds
\end{aligned} \tag{5.51a}$$

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega^*} \left[\frac{\partial \delta v_0}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} N_{yy} + I_0 \delta v_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \delta v_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
- \oint_{\Gamma^*} (N_{xy} n_x + N_{yy} n_y) \delta v_0 ds
\end{aligned} \tag{5.51b}$$

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega^*} \left[-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} M_{xx} - 2\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} M_{xy} - \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} M_{yy} - \delta w_0 q \right. \\
+ \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \left(\hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \left(\hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
+ I_0 \delta w_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + I_2 \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \right) \\
- I_1 \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \right) \left. \right] dx dy \\
- \oint_{\Gamma^*} \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_x \right. \\
+ \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y \\
+ \left(I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) n_x + \left(I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \right) n_y \left. \right] \delta w_0 ds \\
+ \oint_{\Gamma^*} \left[\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \right] ds
\end{aligned} \tag{5.51b}$$

където (n_x, n_y) са посочните косинуси на единичната нормала по границата Γ^e на елемента. Интегрирането по части на инерциалните членове в последното уравнение се налага заради симетричността на изходната слаба форма, което води до симетрична масова матрица в МКЕ модела. От граничните членове в ур. (5.51) следва, че $(u_0, v_0, w_0, \partial w_0/\partial x, \partial w_0/\partial y)$ са първични променливи (обобщени премествания), и

$$\begin{aligned} p_x &\equiv N_{xx}n_x + N_{xy}n_y, & p_y &\equiv N_{xy}n_x + N_{yy}n_y \\ T_x &\equiv M_{xx}n_x + M_{xy}n_y, & T_y &\equiv M_{xy}n_x + M_{yy}n_y \\ Q_n &\equiv \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \right) n_x \\ &+ \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \right) n_y \end{aligned} \quad (5.52)$$

са вторите степени на свобода (обобщените сили). Така крайните елементи на основата на КТСП изискват непрекъснатост на напречното отместване и неговата производна по нормалата по границите на елемента. Също така, за да бъдат удовлетворени условията за константно преместване (твърдо тяло) и константна деформация, развитието на w_0 в полином трябва да бъде пълен квадрат.

5.4.2. Пространствена апроксимация

Напреженията и моментите съдържат първи производни на u_0 и v_0 , както и втори производни на w_0 спрямо координатите x и y . Освен това първичните променливи $u_0, v_0, w_0, \partial w_0/\partial x, \partial w_0/\partial y$ трябва да бъдат разглеждани като променливи на възлите, за да се спази строго тяхната вътрешна непрекъснатост. Така, преместванията u_0, v_0 трябва да се апроксимират с интерполационни функции на Лагранж, докато w_0 следва да се апроксимира с интерполационни функции на Ермит по областта на елемента Ω^e . Нека

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^m u_j^e(t) \psi_j^e(x, y) \\ v_0(x, y, t) &\approx \sum_{j=1}^m v_j^e(t) \psi_j^e(x, y) \\ w_0(x, y, t) &\approx \sum_{k=1}^n \Delta_k^e(t) \varphi_k^e(x, y) \end{aligned} \quad (5.53)$$

където u_j^e, v_j^e означават стойностите на u_0, v_0 в j -тия възел на елементите на Лагранж, Δ_k^e означават стойностите на w_0 и неговите производни по x и y в k -тия възел, (ψ_j^e, φ_k^e) са интерполационните функции на Лагранж и Ермит, съответно.

Интерполационните функции на Лагранж $\psi_i^e(x, y)$ използвани при равнинните премествания u_0, v_0 могат да бъдат получени по следния начин. Правоъгълен елемент, представен с пълен квадратичен полином

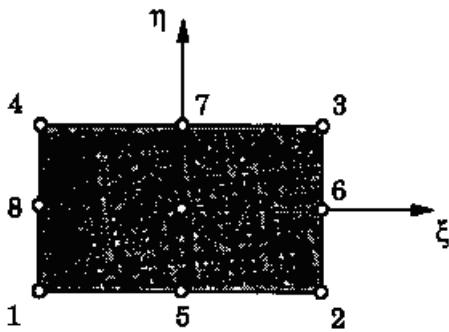
$$\psi_i^e(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy + e_i x^2 + f_i y^2 + g_i x^2 y + h_i xy^2 + k_i x^2 y^2$$

има девет параметъра и следователно девет възела (Фиг.5.7). В тези елементи деформациите се представят поне като би-линейни

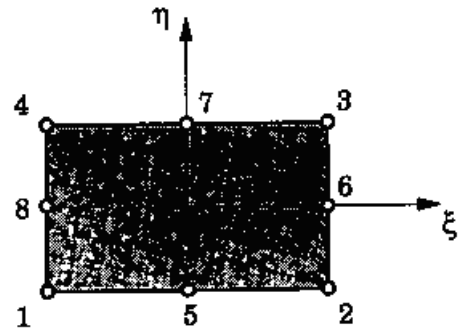
$$\varepsilon_{xx}^0 = \sum_{i=1}^9 u_i^e (b_i + 2e_i x + d_i y + 2g_i xy + h_i y^2 + 2k_i xy^2)$$

$$\varepsilon_{yy}^0 = \sum_{j=1}^9 v_j^e (c_j + d_j x + 2f_j y + 2h_j xy + g_j x^2 + 2k_j x^2 y)$$

и сръзващата деформация се представя като би-кубична функция на координатите



Фигура 5.7. Квадратичен правоъгълен елемент на Лагранж с девет възела



Фигура 5.8. Специален квадратичен правоъгълен елемент с осем възела

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \\ \psi_3^e \\ \psi_4^e \\ \psi_5^e \\ \psi_6^e \\ \psi_7^e \\ \psi_8^e \\ \psi_9^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) + (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) + (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) + (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) + (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1-\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) - (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1+\eta) - (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ 2(1-\xi)(1-\eta^2) - (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ 4(1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{Bmatrix} \quad (5.54)$$

Специална фамилия от елементи на Лагранж са елементи, които нямат вътрешен възел. Тези елементи имат по малко възли в сравнение с елементите на Лагранж от осми ред. И те не могат да се получат като се използват тензорни произведения на едномерни интерполационни функции на Лагранж. Използва се

алтернативна процедура. Интерполационните функции за квадратичен специален елемент са дадени с ур. (5.55) (Фиг.5.8). Независимо, че фамилията специални интерполационни функции на Лагранж не е пълна, защото последният член в квадратичния полином е изпуснат, специалните елементи на Лагранж са доказали своята голяма ефективност в огромното болшинство практически приложения.

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^e \\ \psi_2^e \\ \psi_3^e \\ \psi_4^e \\ \psi_5^e \\ \psi_6^e \\ \psi_7^e \\ \psi_8^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\ (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\ (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \\ 2(1-\xi^2)(1-\eta) \\ 2(1+\xi)(1-\eta^2) \\ 2(1-\xi^2)(1+\eta) \\ 2(1-\xi)(1-\eta^2) \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

5.4.3. Полу дискретизиран модел на крайни елементи

Замествахме приближенията в ур. (5.53) за преместванията и интерполационната функция за виртуалното преместване в слабите форми, ние получаваме i -тото уравнение за всяка слаба форма

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^m (K_{ij}^{11} u_j^e + K_{ij}^{12} v_j^e + M_{ij}^{11} \ddot{u}_j^e) + \sum_{k=1}^n (K_{ik}^{13} \Delta_k^e + M_{ik}^{13} \ddot{\Delta}_k^e) - F_i^1 - F_i^{T1} \\ 0 &= \sum_{j=1}^m (K_{ij}^{21} u_j^e + K_{ij}^{22} v_j^e + M_{ij}^{22} \ddot{v}_j^e) + \sum_{k=1}^n (K_{ik}^{23} \Delta_k^e + M_{ik}^{23} \ddot{\Delta}_k^e) - F_i^2 - F_i^{T2} \\ 0 &= \sum_{j=1}^m (K_{kj}^{31} u_j^e + K_{kj}^{32} v_j^e + M_{kj}^{31} \ddot{u}_j^e + M_{kj}^{32} \ddot{v}_j^e) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^n [(K_{k\ell}^{33} + G_{k\ell}^e) \Delta_\ell^e + M_{k\ell}^{33} \ddot{\Delta}_\ell^e] - F_k^3 - F_k^{T3} \end{aligned} \quad (5.56)$$

където $i = 1, 2, \dots, m$ и $k = 1, 2, \dots, n$. В матрична форма тези уравнения имат вида

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] & [M^{13}] \\ [0] & [M^{22}] & [M^{23}] \\ [M^{13}]^T & [M^{23}]^T & [M^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}^e\} \\ \{\ddot{v}^e\} \\ \{\ddot{\Delta}^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} + \{F^{T1}\} \\ \{F^2\} + \{F^{T2}\} \\ \{F^3\} + \{F^{T3}\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Това завършва изграждането на МКЕ моделът за КТСП. Ур. (5.56) се нарича МКЕ модел за премествания, защото той се основана на уравнения на

движението, изразени чрез преместванията, и обобщените премествания са първичните степени на свобода във възлите.

5.4.4. Напълно дискретизиран МКЕ модел

В случай на **статично огъване** при приложени механични и термални натоварвания ур. (5.56) се редуцира до

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [K^{33}] + [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} + \{F^{T1}\} \\ \{F^2\} + \{F^{T2}\} \\ \{F^3\} + \{F^{T3}\} \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

и се подразбира, че всички членове, съдържащи производни по времето, са нула в смисъла на ур. (5.52).

В случая на **натурални вибрации**, реакцията на плочата се предполага периодична. Ур. (5.56) придобива вида

$$\left(\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{13}]^T & [K^{23}]^T & [K^{33}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M^{11}] & [0] & [M^{13}] \\ [0] & [M^{12}] & [M^{23}] \\ [M^{13}]^T & [M^{23}]^T & [M^{33}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

където ω е честотата на натуралната вибрация.

За **динамичен анализ** ур. (5.56) може да се запише във вида

$$[K^e]\{\bar{\Delta}^e\} + [M^e]\{\ddot{\bar{\Delta}}^e\} = \{F^e\} \quad (5.59)$$

където $[K^e]$ и $[M^e]$ са матриците на коравината и на масата и

$$\{\bar{\Delta}^e\} = \begin{Bmatrix} \{u^e\} \\ \{v^e\} \\ \{\Delta^e\} \end{Bmatrix}$$

Тъй като ур. (5.59) е идентично с ур. (5.7), апроксимацията по времето се извършва по същия начин. Имаме

$$[\hat{K}^e]_{s+1}\{\bar{\Delta}^e\}_{s+1} = \{\hat{F}^e\} \quad (5.60)$$

$$[\hat{K}^e]_{s+1} = ([K^e]_{s+1} + [G^e]_{s+1}) + a_3[M^e]_{s+1}$$

$$\{\hat{F}^e\} = \{F^e\}_{s+1} + [M^e]_{s+1}\{\ddot{\bar{\Delta}}^e\}$$

$$\{\ddot{\bar{\Delta}}^e\} = (a_3\{\bar{\Delta}^e\}_s + a_4\{\dot{\bar{\Delta}}^e\}_s + a_5\{\bar{\Delta}^e\}_s)$$

$$a_1 = (1 - \alpha)\delta t_s, \quad a_2 = \alpha\delta t_s, \quad a_3 = \frac{2}{\gamma(\delta t_s)^2}$$

$$a_4 = \delta t_s a_3, \quad a_5 = \frac{(1 - \gamma)}{\gamma}$$

където $\delta t_s = t_{s+1} - t_s$ е стъпката по времето.

5.4.5. Четириъгълни крайни елементи и числено интегриране

При все, че не всяка област не може да се представи само с четириъгълни крайни елементи. това, за тях лесно да се получат интерполационните функции и интегралите се оценяват по-лесно върху четириъгълна област. Затова от практическа гледна точка е по-удобно да се ползват четириъгълните крайни елементи с прави или криволинейни страни. Трансформацията от координатите x, y , използвани за формулиране на задачата, наречени *глобални координати*, към локалните координати \bar{x}, \bar{y} представлява алгебрически сложни изрази, които изключват аналитично оценяване на интегралите. Затова се използва числено интегриране за оценяване на тези сложни изрази.

Координатната система на крайния елемент, наречена още *локална координатна система*, се избира да е удобна за лесно конструиране на интерполационните функции, но също е полезно тя да е удобна също и за численото оценяване на интегралите. Схемата на Гаус-Лежандър за интегриране изисква интегралът да бъде оценен върху специална област или по отношение на специална координатна система. Гаусовата квадратура изисква квадратна област $\hat{\Omega}$ с размери 2×2 и координатната система (ξ, η) да бъде такава, че $-1 \leq (\xi, \eta) \leq 1$. Координатите (ξ, η) се наричат *нормализирани*. Трансформацията на даден интегрален израз върху квадратен елемент Ω^e в (x, y) към такъв дефиниран към такъв върху областта $\hat{\Omega}$ от (ξ, η) по Гаус-Лежандър облекчава пресмятането му.

Трансформации на координатите. между Ω^e и $\hat{\Omega}$ се изразява в координати с уравненията

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m x_j^e \hat{\psi}_j^e(\xi, \eta), \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^m y_j^e \hat{\psi}_j^e(\xi, \eta) \quad (5.61)$$

където типичната променлива $u(x, y)$ се изразява с

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)) \quad (5.62)$$

където $\hat{\psi}_j^e$ са интерполационните функции на елемента $\hat{\Omega}$ е ψ_j^e са интерполационните функции на елемента Ω^e , върху който u се апроксимира. Трансформацията (5.61) преобразува точка (x, y) в типичен елемент Ω^e от мрежата в точка (ξ, η) в елемента $\hat{\Omega}$ и обратно, ако якобиянът на трансформацията е положително дефиниран.

Интерполационните функции ψ_j^e използвани за апроксимирането на зависимите променливи са, като цяло, различни от $\hat{\psi}_j^e$, използвани при апроксимацията на геометрията. В зависимост от относителната степен на

апроксимации, използвана за геометрията и за зависимите променливи, формулировките чрез крайниелементи се класифицират в три категории.

1. *Суперпараметрични* ($m > n$): Степента на апроксимиращия полином, използван за геометрията е по-голяма от степента на нполинома, използван за зависимата променлива.
2. *Изопараметрични* ($m = n$): Равни степени на апроксимация се ползват за геометричната и зависимите променливи
3. *Субпараметрични* ($m < n$):Използва се по-висока степен на апроксимация за зависимата променлива.

В МКЕ анализа на греда на Ойлер-Бернули за геометрията използваме линейна интерполация на Лагранж

$$x = \sum_{j=1}^2 x_j \hat{\psi}_j(\xi) \quad (5.63)$$

докато кубичната интерполация на Ермит се използва за апроксимиране на напречното преместване

$$w_0(x) = \sum_{j=1}^4 \Delta_j^e \varphi_j(x(\xi)) \quad (5.64)$$

т.е. използваме субпараметрична формулировка за напречното преместване w_0 . В крайния елемент на Тимошенко за греда ние можем да използваме изопараметрична формулировка за напречното преместване w_0 и за ротацията ϕ_x , т.е. една и съща степен на интерполация.

В едномерния случай на координатна трансформация се ползва линейна трансформация

$$x = \sum_{i=1}^2 x_i^e \hat{\psi}_i(\xi), \quad \hat{\psi}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \hat{\psi}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.65)$$

където $x_1^e = x_{e+1} - x_e$ е дължината на елемента. Интерполационните функции на Лагранж и Ермит чрез нормализираната координата ξ с трансформацията (5.65) са:

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi^2 + \xi^3), & \varphi_2 &= -\frac{h_e}{8}(1 - \xi)(1 - \xi^2) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi^2 - \xi^3), & \varphi_4 &= \frac{h_e}{8}(1 + \xi)(1 - \xi^2) \end{aligned} \quad (5.67)$$

В анализа с крайни елементи не се предвижда трансформация на физическата област или на решението. Получените алгебрични уравнения при формулирането на задачата с МКЕ са спрямо променливите на възлите на

физическата област и стойностите при възлите са отнасят до глобалната координатна система (обобщените премествания).

Числено интегриране: гаусова квадратура. Коефициентите на алгебричните уравнения на модела от крайни елементи са интегрални от физическите параметри. Интегралните изрази по принцип са сложни поради пространствената зависимост на параметрите или трансформациите. Затова в работата се използват числени интеграционни методи за оценяването им, известни още като числени квадратури. В този параграф излагаме гаусовата квадратура, която се прилага за елементите в областта $\hat{\Omega}$ (главни елементи), за правоъгълна геометрия.

Основните елементи на гаусовата квадратура са представени със следния интегрален израз

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[a(x, y) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} + b(x, y) \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \right) + c(x, y) \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} + d(x, y) \psi_i^e \psi_j^e \right] dx dy \quad (5.68)$$

Искаме да трансформираме интеграла от Ω^e в главния елемент $\hat{\Omega} = \{(\xi, \eta) : -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$, така, че да може да се използва гаусова квадратура. Интегралният израз съдържа не само $\psi_i^e(x, y)$, но и техните производни по отношение на глобалните координати (x, y) . Функциите $\psi_i^e(x, y)$ изразяват чрез локалните координати ξ и η с трансформация (5.61) като едномерни функции на Лагранж и Ермит в ур. (5.66) и (5.67). Отначало получаваме съотношения от $\partial \psi_i^e / \partial x$ и $\partial \psi_i^e / \partial y$ към $\partial \psi_i^e / \partial \xi$ и $\partial \psi_i^e / \partial \eta$ използвайки ур. (5.61). От правилото за частно диференциране имаме

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [r]^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^e \quad (5.69)$$

с якобиан по-голям от нула или обърнато

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

Якобианът може да се определи замествайки (5.61) в ур. (5.69).

$$\begin{aligned}
[J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^m y_i \frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \hat{\psi}_m}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.71}$$

при дадени глобални координати (x_j, y_j) на възлите на елемент и интерполационните формули $\hat{\psi}_j^e$ използвани за геометрията. Изобщо функциите $\hat{\psi}_j^e$ са различни от ψ_j^e използване при апроксимацията на променливите. Якобиянът за променливите се дава с формулата

$$J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \tag{5.72}$$

От ур. (5.70) имаме

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \equiv [J^*] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{5.73}$$

$$J_{11}^* = \frac{J_{22}}{J}, \quad J_{12}^* = -\frac{J_{12}}{J}, \quad J_{22}^* = \frac{J_{11}}{J}, \quad J_{21}^* = -\frac{J_{21}}{J}$$

Връщайки се към ур. (5.68) можем да го изпишем чрез натуралните координати ξ и η

$$\begin{aligned}
K_{ij}^e &= \int_{\Omega} \left\{ a(\xi, \eta) \left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \right) \left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad + b(\xi, \eta) \left[\left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \right) \left(J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \eta} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(J_{11}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} + J_{12}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \right) \left(J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \eta} \right) \right] \right. \\
&\quad + c(\xi, \eta) \left(J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \eta} \right) \left(J_{21}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \xi} + J_{22}^* \frac{\partial \hat{\psi}_i^e}{\partial \eta} \right) \\
&\quad \left. + d(\xi, \eta) \hat{\psi}_i^e \hat{\psi}_j^e \right\} J d\xi d\eta \equiv \int_{\Omega} F_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta
\end{aligned}$$

където областта $dA = dx dy$ в елемент Ω^e се трансформира в $dA \equiv dx dy = J d\xi d\eta$ в главния елемент $\hat{\Omega}$. Използвайки формулите на гаусовата квадратура за интегралите, определени върху главен правоъгълен елемент $\hat{\Omega}$, които са същите като тези при едномерна квадратура, получаваме

$$\int_{\Omega} F_{ij}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F_{ij}(\xi, \eta) d\eta \right] d\xi \approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{J=1}^N F_{ij}(\xi, \eta_J) W_J \right] d\xi$$

$$\approx \sum_{I=1}^M \sum_{J=1}^N F_{ij}(\xi_I, \eta_J) W_I W_J \quad (5.74)$$

където M и N са броят на точките в гаусовата квадратура в ξ и η посоките, (ξ_i, η_i) са гаусовите точки и W_I и W_J са съответните гаусови тегла (Таблица 5.1).

Таблица 5.1. Тегла и точки за квадратура на Гаус-Лежандър в една координатна посока

N	Точки ξ_I	Тегла W_I
1	0.0000000000	2.0000000000
2	± 0.5773502692	1.0000000000
3	0.0000000000 ± 0.7745966692	0.8888888889 0.5555555555
4	± 0.3399810435 ± 0.8611363116	0.6521451548 0.3478548451
5	0.0000000000 ± 0.5384693101 ± 0.9061798459	0.5688888889 0.4786286705 0.2369268850
6	± 0.2386191861 ± 0.6612093865 ± 0.9324695142	0.4679139346 0.3607615730 0.1713244924

5.4.6. Пресмятане на напреженията

След като се пресметнат обобщените премествания във възлите, от ур. (5.53) могат да се пресметнат деформациите, използвайки съотношенията (2.10). В случая на малки деформации, премествания и ротации, какъвто разглеждаме тук, деформациите във всяка точка (x, y, z) в типичен елемент Ω^e може да се пресметне от уравненията

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{pmatrix}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{pmatrix}^e - z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}^e$$

$$= \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\ v_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\ u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \end{pmatrix}^e - z \sum_{k=1}^n \Delta_k^e \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}^e \quad (5.75)$$

Ще припомним, че само u_0, v_0 и $w_0, \partial w_0 / \partial x, \partial w_0 / \partial y$ са непрекъснати по повърхността на елемента, първите производни на равнинните премествания и вторите производни на напречното преместване като цяло не са непрекъснати в пространството на елемента. В частност, стойностите на всяка компонента на деформациите пресметната от различните елементи при един възел са различни.

Напреженията във всяка точка на плочата се пресмятат от конструктивните уравнения на композита, тъй като деформациите са прекъснати функции, напреженията също са прекъснати функции по елемента, включително във възлите. Има изследвания, които сочат, че напреженията, пресметнати чрез гаусовите точки на един елемент, са най-точни. При пресмятанята на деформациите и напреженията в настоящите изследвания е използвано едноточковото гаусово правило в центъра на елемента.

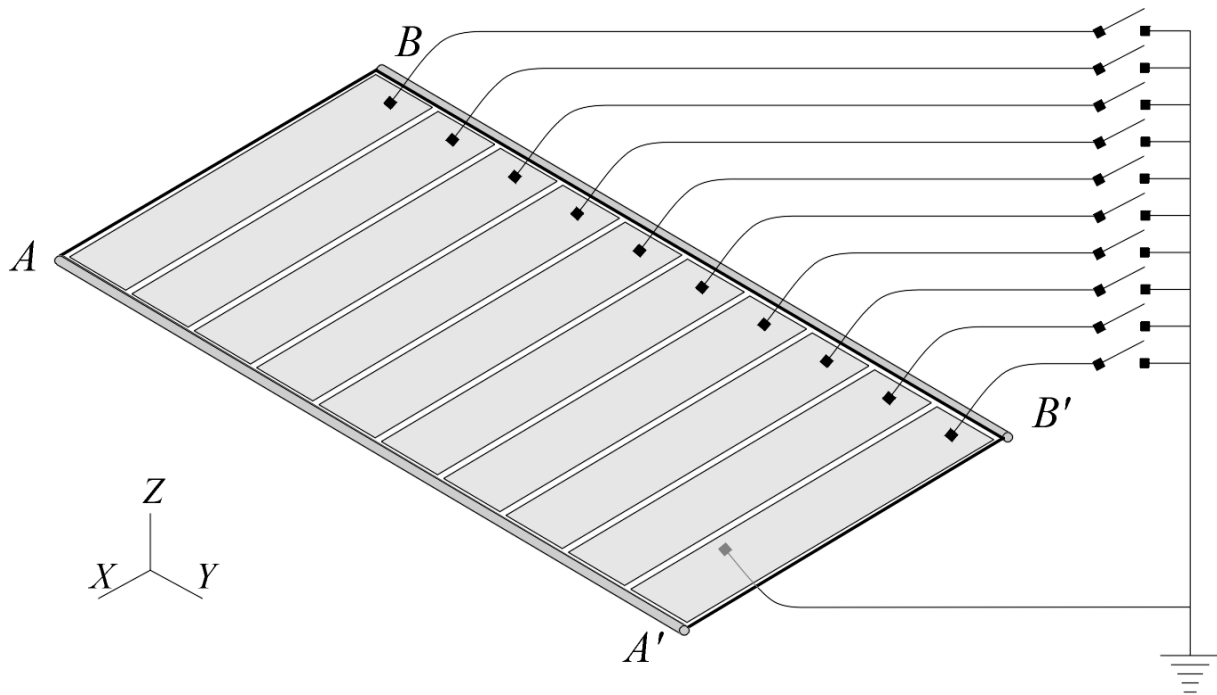
5.5. МКЕ модели на ламинати с пиезоелектрически слоеве

5.5.1. Композитна плоча (КТСП)

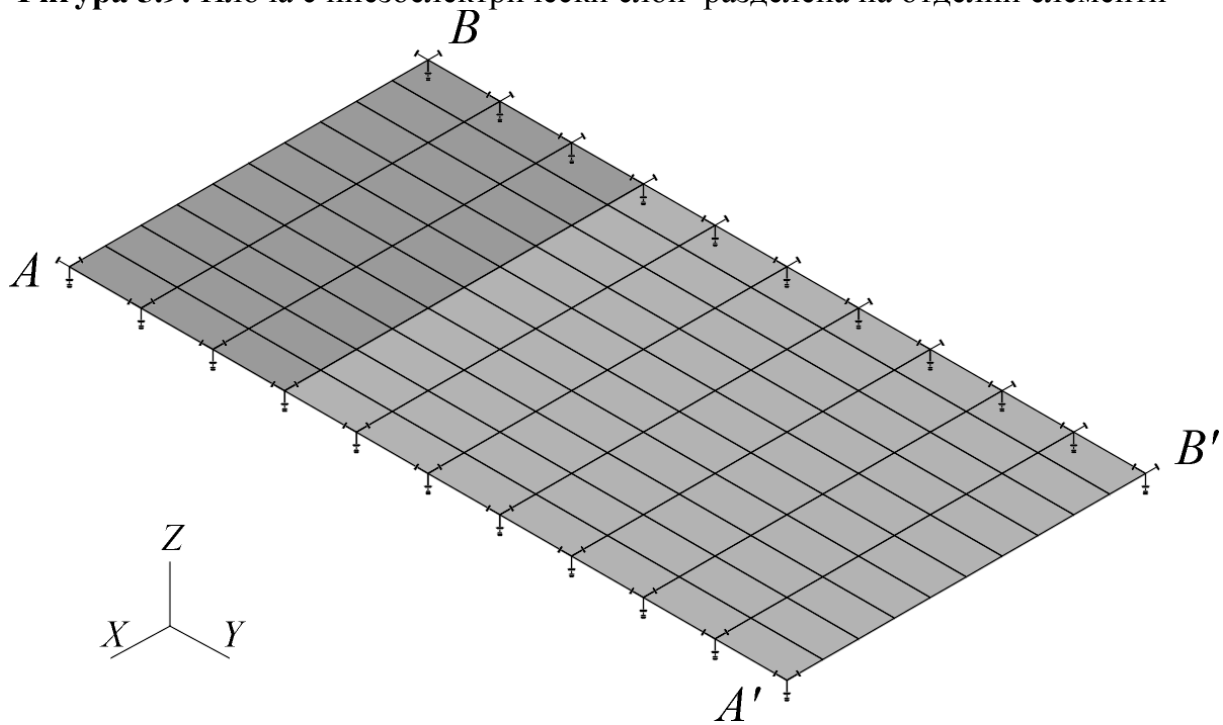
Най-важната стъпка в матричния анализ на структури е формулирането на поелементно дискретен математически модел, еквивалентен на реалната непрекъсната структура. Този модел е необходим, за да имаме структура с краен брой степени на свобода, спрямо които може да се извършат алгебрични операции. Формулирането на такъв модел завършва с пресмятането на енергиите на непрекъснатата и дискретната системи по елементи. За плочи следва да използваме приближено представяне с фиктивни граници и закрепвания. Трябва да преминем към употребата на предположени напрежения или премествания в елементите. Тези предположения трябва да бъдат такива, че когато размерът на елементите се намалява, матричното решение за напреженията и преместванията да клони към точните стойности на непрекъснатата система.

Поелементният дискретен анализ на структурни елементи, които са непрекъснато прекрепени представлява известна трудност. В тези задачи няма взаимно еднозначно съответствие между силите, приложени към отделния елемент, използвани в матричния анализ, и силите в реалната структура, и, следователно, това изисква сериозно внимание при интерпретирането на резултатите.

Непрекъснато закрепените структурни елементи се срещат в много приложения. За да се получат детайлно съществуващите напрежения в голям панел, прикрепен непрекъснато към съседна структура, може да изисква всеки панел да бъде допълнително разделен на редица по-малки панели чрез мрежа от линии, чиито пресичания ще бъдат възлите. По-малките панели могат да се разглеждат като елементи на структурата, прикрепени непрекъснато към съседните панели.



Фигура 5.9: Плоча с пиезоелектрически слой разделена на отделни елементи

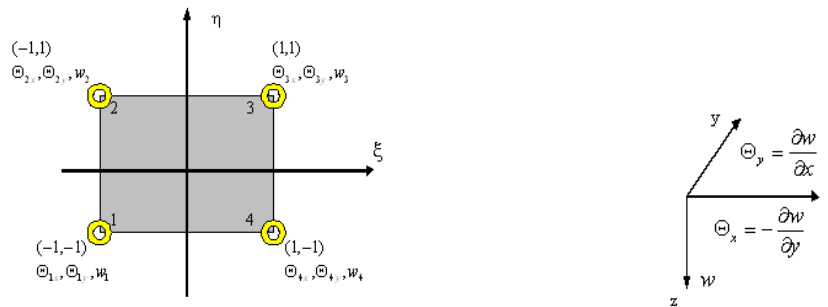


Фигура 5.10 Мрежа от крайни елементи (30% натоварена)

Например, плоча с пиезоелектрическо покритие (Фиг.5.9), закрепена шарнирно от две срещуположни страни (AA' и BB') може да бъде разделена с мрежа на крайни елементи както е показано на Фиг.5.10.

Разглеждаме правоъгълна слоеста композитна плоча при чисто огъване. Дискретизацията на плочата е направена с **правоъгълни крайни елементи**, имащи четири възела в ъглите на всеки елемент. Всеки възел има три степени на

свобода (с.с.) – две ротации около координатните оси \mathbf{Ox} и \mathbf{Oy} и едно напречно преместване по посока на \mathbf{Oz} оста (12 с.с. за елемент) (Фиг.5.11).



Фигура 5.11: Типичен краен елемент с четири възела

Плочата има дължина a и ширина b . За безразмерни локални координати за елемента при трансформация използваме

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

Апроксимиращите полиномиални функции са $\{\psi\}$, а елементите са $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$. За да определим преместванията използваме следните съотношения

$$\{\psi\} = [N]\{d\}$$

Уравненията между равнинните деформации и преместванията се дават с формулата на Коши

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (5.76)$$

където $\{d\}$ е векторът на преместванията и $[B]$ е матрицата на диференцирането.

Съотношенията между напреженията и деформациите се дават със закона на Хук във вида:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad [D] = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

където $[D]$ е матрицата на равнинните напрежения, E е модулът на Юнг и ν е коефициентът на Поасон

Матрицата на коравината може да се определи със следните формули в глобалната и в локалната координатни системи:

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t dx dy$$

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\eta d\xi \quad (5.79)$$

От изчислителска гледна точка е по-удобно първо да се пресметнат масовите матрици за отделните елементи използвайки локална координатна системи и след това да се трансформират и обединят в масова матрица на цялата структура. Масовата матрица на отделен правоъгълен елемент се пресмята по формулата

$$m = \rho V \int_0^1 \int_0^1 a^T a d\eta d\xi \quad (5.80)$$

където матрицата \mathbf{a} се отнася до всички премествания на възлите в локалната координатна система.

Трансформиране на координатните оси. За да се пресметне коравината на цялата структура, трябва да се построи матрицата на коравината чрез обединяване на коравините на всички отделни елементи..

Първоначално матрицата на коравината \mathbf{K} се пресмята в локални координати, подходящо ориентирани, за да бъдат мвинимизирани изчисленията. След това трябва се въвежда матрица на трансформацията, която преобразува \mathbf{K} в глобални координати. Матричното съотношение между преместванията \mathbf{u} на елемента в локални и глобални координати е

$$\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{u}}$$

където λ за правоъгълен елемент за плоча при огъване се дава с формулата

$$\lambda = [\Lambda \ \Lambda \ \Lambda \ \Lambda] \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_{ox} & m_{ox} \\ 0 & l_{oy} & m_{oy} \end{bmatrix}$$

и $[l_{ox}, m_{ox}]$ и $[l_{oy}, m_{oy}]$ са посочните косиноси за \mathbf{Oy} и \mathbf{Ox} посоките.

Получаване на глобалните матрици на масата и коравината. Матрицата на коравината $[k]$ в локални координати е квадратна 12x12

$$[k] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12,1} & \cdots & a_{12,12} \end{pmatrix}$$

и може да се представи чрез 3x3 под-матрици както следва.

$$[k] = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}$$

като всяка под-матрица има вида

$$[k_{rs}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Размерът на глобалната матрица на коравината зависи от броя навъзлите по Y и X и може да се пресметне като се умножи броя на възлите с степента на свобода на всеки възел. След горното представяне на $[k]$ е лесно да се състави глобалната матрица. За обединяване прилагаме следното общо правило – елементите на локалната матрица на коравината с размери (4x4) се поставят на местата на елементите в глобалната матрица. В резултат се получава тридиагонална глобална матрица на коравината.

$$[K_{rs}] = \sum_e [k_{rs}]$$

Масовите матрици на отделните елементи се представят по аналогичен начин и се обединяват в и глобалната масова матрица по същия алгоритъм.

Уравнение на движението в пространството на състоянията. Моделирането чрез крайни елементи на динамичната система води до линеаризирана система от обикновени диференциални уравнения от втори ред

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [F]\{u\}$$

Тази система може да се приведе до система от първи ред. Въвеждаме векторът на състоянията:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix}$$

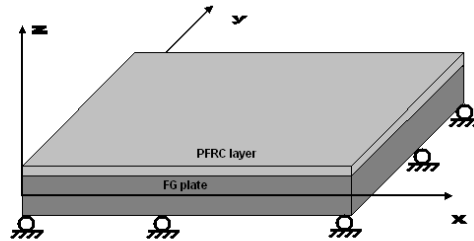
и получаваме следното съотношение:

$$\begin{aligned} \{\dot{x}\} &= \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ -[M]^{-1}[D]\dot{q} - [M]^{-1}[K]q + [M]^{-1}[F]u \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}[F] \end{bmatrix} u = \\ &= [A]\{x\} + [b]\{u\} \end{aligned} \tag{5.81}$$

Този модел се използва за анализ и за синтез на управление за плочата.

5.5.2. Композитна плоча (ТДПР)

Математически модел. Разглеждаме симетрична, шарнено закрепена правоъгълна композитна плоча с един слой функционално подобрен материал (ФПМ) и един пиезоелектрически слой (пиезоелектрик усилен с фибри) (Фиг.5.12), интегриран с горната повърхност на плочата и действащ като управляващо устройство.



Фигура 5.12. Шарнирно закрепена композитна плоча

Размерите на плочата са: дължина **a**, ширина **b** и дебелина **h** на ФПМ слоя. Пиезоелектрическият слой има дебелина **h_p** и се предполага, че е залепен перфектно върху повърхността на плочата.

Кинематика. Разглежданията за двуслойната плоча извършваме в декартова координатна система (x, y, z) Фибрите в пиезоелектрическия слой са хоризонтално организирани и са ориентирани под ъгъл θ по отношение на x-оста. Тук се използва теорията за напречни деформации от първи ред (ТДПР) за композитни плочи със следните предположения

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \end{aligned} \tag{5.82}$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

където where $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$ и $w_0(x,y)$ са преместванията на средната равнина по трите координати, θ_x , θ_y са ъглите на ротация на нормалата на плочата в xz и yz координатните равнини, съответно. За удобство транслационните и ротационните премествания ги разглеждаме в отделни вектори :

$$\{d_t\} = [u_0, v_0, w_0]^T \quad \{d_r\} = [\theta_x, \theta_y]^T$$

Векторът на деформациите имва пет ненулеви компоненти

$$\varepsilon(x,y,z) = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}]^T,$$

които също за удобство ще представим чрез два вектора – вътрешно-равнинни деформации и външно-равнинни деформации съответно:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_b^T, \varepsilon_s^T\}^T$$

Комбинирайки полето на премесванията от ур. (5.82) и отношенията за деформациите и преместванията от теорията, получаваме:

$$\{\varepsilon_b\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right]^T \quad \{\varepsilon_s\} = \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + z \theta_x, \frac{\partial w_0}{\partial y} + z \theta_y \right]^T \quad (5.83)$$

Модел на електрическото поле: Предполагаме, че електрическият потенциал във ФПМ слоя е равен на нула. Тъй като дебелината на пиезоелектрическия потенциал е много малка, ние смятаме, че електрическият потенциал е разпределен линейно по z посоката. Когато пиезоелектрик е монтиран върху горната повърхност на ФПМ плочата, предполагаме, че потенциалът е равен на:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{h_p} \left(z - \frac{h}{2} \right) \Phi_0(x, y), \quad \frac{h}{2} < z \leq \frac{h}{2} + h_p \quad (5.84)$$

Конструктивни уравнения По аналогия с деформациите, векторът на напезението е разделен на два вектора – един за вътрешноравнинните напрежения и един за външно-равнинните напрежения:

$$\{\sigma^k\} = \{\sigma_b^{kT}, \sigma_s^{kT}\}^T \quad \{\sigma_b^k\} = [\sigma_x^k, \sigma_y^k, \sigma_{xy}^k]^T \quad \{\sigma_s^k\} = [\sigma_{xz}^k, \sigma_{yz}^k]^T \quad (5.85)$$

$k=1$ се отнася до ФПМ слоя, а $k=2$ се отнася до пиезоелектрическия слой.

За вектора на напреженията за ФПМ слоят имае:

$$\{\sigma_b^1\} = [C_b] \{\varepsilon_b^1\} \quad \text{и} \quad \{\sigma_s^1\} = [C_s] \{\varepsilon_s^1\} \quad (5.86)$$

където матрицата на равнинната коравина C_b^0 се дава с израза:

$$C_b^0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \end{pmatrix}$$

Матрицата на еластичност при напречно срязване C_s^0 се дава с израза:

$$C_s^0 = \frac{E}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu} \end{pmatrix}$$

Тук E е модулет на Юнг, а ν е коефициентът на Поасон

Предполагаме, че ФПМ материалът е изотропен във всяка точка, но че модулет на Юнг E е експоненциална функция на z и се определя с израза

$$E(z) = E_0 e^{\lambda(z+\frac{h}{2})} \quad (5.87)$$

където E_0 е модулът на Юнг за долната повърхност на ФПМ слоя, а λ е параметърът, който описва изменението на еластичността по дебелината. По този начин матриците на коравината приемат вида:

$$C_b = C_b^0 e^{\lambda(z+\frac{h}{2})} \quad C_s = C_s^0 e^{\lambda(z+\frac{h}{2})}$$

За напреженията на пиезоелектрическия слой имаме :

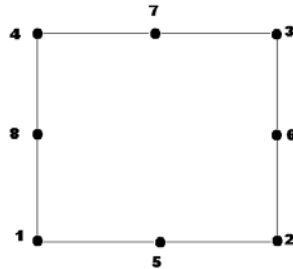
$$\{\sigma_b^2\} = [C_b^2] \{\varepsilon_b\} - [e_b] \{E\} \quad \{\sigma_s^2\} = [C_s^2] \{\varepsilon_s\} - [e_s] \{E\} \quad (5.88)$$

$[e_b]$ и $[e_s]$ са матриците на трансформираните пиезоелектрически константи и $\{E\}$ е векторът на електрическото поле. C_b^2 и C_s^2 са свойствата на пиезоелектрическия материал .

Пълната потенциална енергия за композитната плоча, се дава с израза:

$$T_p = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^2 \int_{\vartheta} (\{\varepsilon_b^k\}^T \{\sigma_b^k\} + \{\varepsilon_s^k\}^T \{\sigma_s^k\}) d\vartheta - \int_{\vartheta} \{E\}^T \{D\} d\vartheta \right] - \int_A \{d\}^T \{f\} dA \quad (5.89)$$

За **моделирането с крайни елементи** използваме изопараметричен правоъгълен елемент с осем възела. ур. (5.5) (Фиг. П.8)



Всеки възел на типичен елемент има 5 с.с., разпределени в два вектора на отнесването:

$$\{d_{ii}\} = [u_{0i} \ v_{0i} \ w_{0i}]^T \quad \{d_{ri}\} = [\theta_{xi} \ \theta_{yi}]^T \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

където d_{ii} и d_{ri} са векторите на премесванията на съответния възел. Премесването на целия елемент се описва със следните два вектора [92]:

$$\{d_t^e\} = [\{d_{t1}\} \ \{d_{t2}\} \ \{d_{t3}\} \ \{d_{t4}\} \ \{d_{t5}\} \ \{d_{t6}\} \ \{d_{t7}\} \ \{d_{t8}\}]^T$$

$$\{d_r^e\} = [\{d_{r1}\} \ \{d_{r2}\} \ \{d_{r3}\} \ \{d_{r4}\} \ \{d_{r5}\} \ \{d_{r6}\} \ \{d_{r7}\} \ \{d_{r8}\}]^T$$

Използвайки векторите $\{d_t^e\}$ и $\{d_r^e\}$ и ур. (П.5.83) изразяваме деформациите по следния начин:

$$\{\varepsilon_b\} = [B_{tb}] \{d_t^e\} + [B_{rb}] \{d_r^e\} \quad \{\varepsilon_s\} = [B_{ts}] \{d_t^e\} + [B_{rs}] \{d_r^e\} \quad (5.90)$$

където

$$[B_{tb}] = [B_{tb1} \ B_{tb2} \ \dots \ B_{tb8}] , \quad [B_{rb}] = [B_{rb1} \ B_{rb2} \ \dots \ B_{rb8}]$$

$$[B_{ts}] = [B_{ts1} \ B_{ts2} \ \dots \ B_{ts8}] , \quad [B_{rs}] = [B_{rs1} \ B_{rs2} \ \dots \ B_{rs8}]$$

и техните подматрици имат вида:

$$[B_{tbi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_i}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} & \frac{\partial n_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_{rbi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial n_i}{\partial y} \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} & \frac{\partial n_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [B_{tsi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial n_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial n_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad [B_{rsi}] = \begin{bmatrix} n_i & 0 \\ 0 & n_i \end{bmatrix}$$

n_i ($i=1,\dots,8$) са интерполационните функции в нормализирани координати отговарящи на i -тия възел.

Обобщеният потенциал на еластичността във всяка точка на елемента се изразява като

$$\Phi_0 = [N_\Phi] \{\Phi_0^e\}, \quad (5.91)$$

където $\{\Phi_0^e\} = [\Phi_{01}, \Phi_{02}, \dots, \Phi_{08}]^T$ и $[N_\Phi] = [n_1, n_2, \dots, n_8]$. Използвайки ур. (5.88) и (5.91) и изразът за потенциала на електрическото поле, векторът на електрическите премествания може да се изрази чрез електрическия потенциал $\{\Phi_0^e\}$ както следва:

$$\{E^k\} = [Z_p] [B_p] \{\Phi_0^e\} \quad (5.92)$$

където

$$[B_p] = [B_{p1}, B_{p2}, \dots, B_{p8}], \quad [B_{pi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial x} & \frac{\partial n_i}{\partial y} & n_i \end{bmatrix},$$

$$[Z_p] = \frac{(-1)^k}{h_p} \begin{bmatrix} -\{z - (-1)^k h/2\} & 0 & 0 \\ 0 & -\{z - (-1)^k h/2\} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

където $k=1$, когато пиезоелектрическият слой е закрепен на горната повърхнина на ФПМ плочата, и $k=2$, когато той е приткрепен на долната ѝ повърхност.

Полагайки ур. (5.82) в ур. (5.89) и използвайки ур. (5.92) получаваме следния израз за пълната потенциална енергия за типичен елемент от композината плоча

$$\begin{aligned} T_p^e = & \frac{1}{2} [\{d_t^e\}^T [K_t^e] \{d_t^e\} + \{d_r^e\}^T [K_r^e] \{d_r^e\} + \{d_r^e\}^T [K_r^e] \{d_r^e\} \\ & - \{d_t^e\}^T [F_{tp}^e] \{\Phi_0^e\} - \{d_r^e\}^T [F_{rp}^e] \{\Phi_0^e\} - \{\Phi_0^e\}^T [F_{pt}^e] \{d_t^e\} \\ & - \{\Phi_0^e\}^T [F_{pr}^e] \{d_r^e\} - \{\Phi_0^e\}^T [K_D^e] \{\Phi_0^e\} - \{d_t^e\}^T \{F^e\}] \end{aligned} \quad (5.93)$$

където различните матрици на коравината се пресмятат от изразите:

$$\begin{aligned}
 [K_{ib}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{ib}]^T [D_{ib}] [B_{ib}] dx dy & [K_{is}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{is}]^T [D_{is}] [B_{is}] dx dy \\
 [K_{irb}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{ib}]^T [D_{irb}] [B_{rb}] dx dy & [K_{irs}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{is}]^T [D_{irs}] [B_{rs}] dx dy \\
 [K_{rrb}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{rb}]^T [D_{rrb}] [B_{rb}] dx dy & [K_{rrs}^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [B_{rs}]^T [D_{rrs}] [B_{rs}] dx dy \\
 [F^e] &= \int_0^{a_e} \int_0^{b_e} [N_i]^T \{f\} dx dy
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

и матриците на коравината се пресмятат чрез формулите:

$$\begin{aligned}
 [D_{ib}] &= [\bar{C}_b^0] \int_{-h/2}^{h/2} e^{\lambda(z+h/2)} dz + [\bar{C}_b^2] h_p & [D_{is}] &= [\bar{C}_s^0] \int_{-h/2}^{h/2} e^{\lambda(z+h/2)} dz + [\bar{C}_s^2] h_p \\
 [D_{irb}] &= [\bar{C}_b^0] \int_{-h/2}^{h/2} z e^{\lambda(z+h/2)} dz + \frac{1}{2} (-1)^k [\bar{C}_b^2] h_p (h+h_p) \\
 [D_{rrb}] &= [\bar{C}_b^0] \int_{-h/2}^{h/2} z^2 e^{\lambda(z+h/2)} dz + \frac{1}{3} [\bar{C}_b^2] \{(h/2+h_p)^3 - h^3/8\} \\
 [D_{irs}] &= [D_{is}] & [D_{rrs}] &= [D_{rs}]
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

След като се приложи принципът за минимум на пълната потенциална енергия $\delta T_p^e = 0$, получаваме следната система уравнения за всеки елемент.

$$\begin{aligned}
 [K_t^e] \{d_t^e\} + [K_{tr}^e] \{d_r^e\} &= [F_{tp}^e] \{\Phi_0^e\} + \{F^e\} \\
 [K_r^e] \{d_t^e\} + [K_r^e] \{d_r^e\} &= [F_{rp}^e] \{\Phi_0^e\}
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

Обединявайки тези системи получаваме системата линейни уравнения:

$$[K] \{d\} = [F_{ip}] \{\Phi\} + \{F\} \tag{5.97}$$

Масовата матрица на типичен елемент се изразява като интеграл от плътността $\rho(x, y, z)$ по обема на елемента със следната функция

$$M_i^* = \int_V N^T \rho N dv \tag{5.98}$$

Обединяваме масовите матрици на елементите, за да вполучим обобщената масова матрица $[M]$. Тогава за уравнението на движението на плочата, моделирана с крайни елементи получаваме

$$[M] \{\ddot{X}_i\} + [K] \{X_i\} = [F_{ip}] \{\Phi\} + \{F\} \quad (\{\ddot{X}_i\} - \text{ускорение}) \tag{5.99}$$

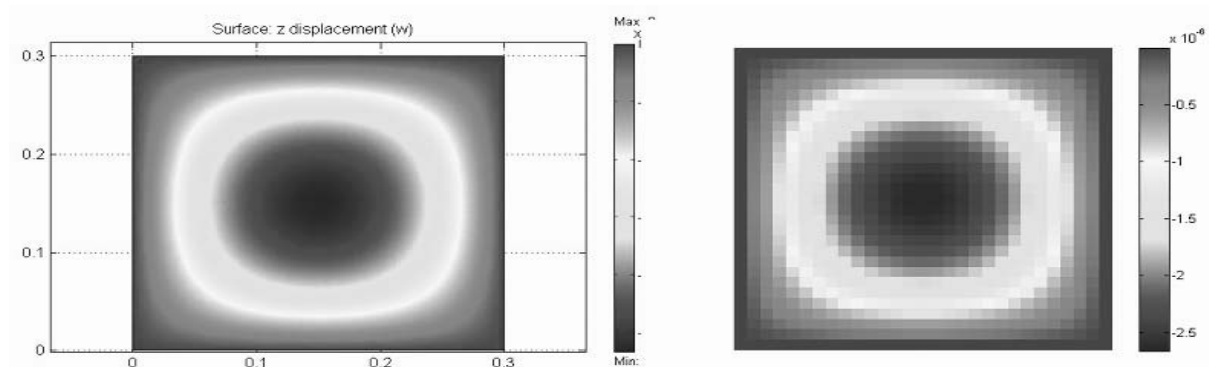
Числена потвърждение на МКЕ модела. За да се потвърди полученият модел на композитната плоча, ние разглеждаме няколко упростиавания на ур. (5.98). Резултатите от симулациите се сравняват с резултати от други източници. Първо разглеждаме ФПМ слоеста плоча с размери 10m на 10m и дебелина 0.1 m, с модул на Юнг константа - $E = 30 \text{e}6 \text{Pa}$ и коефициент на Поасон 0.3. Към

центъра на плочата е приложена концентрирана външна напречна сила от 40 N. За такава плоча са получени аналитични резултати и максималното напречно отклонение е 0.0169, а числен резултат получен с FEMLAB с повече от 600 триъгълни елемента - 0.0170. Резултати с предложения модер сразличен брой крайни елементи са показани на Таблица 2.

Таблица 2. Максимално отместване на плочата

Размери на МКЕ модела	Максимално отместване	Размери на МКЕ модела	Максимално отместване
12x24	0.01675899	24x24	0.01686863
12x32	0.01677569	32x32	0.01689886

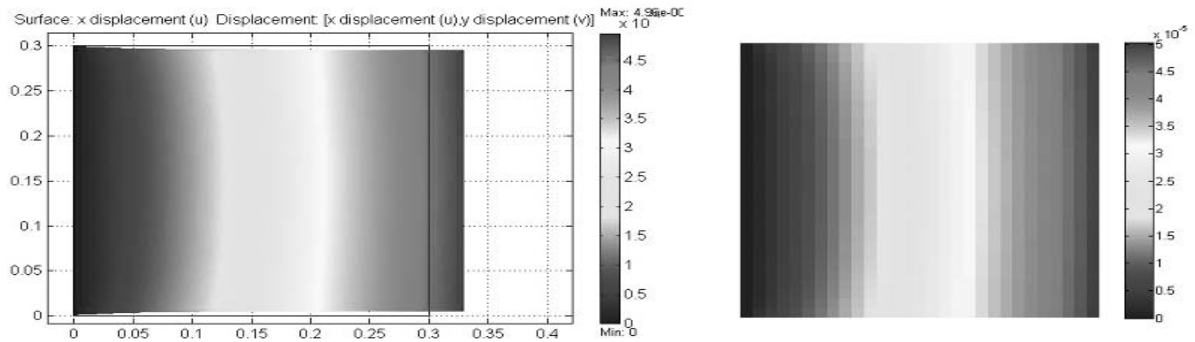
Сравнителни резултати за вертикалните отмествания, получени с построения модели и с предложения във FEMLAB стандартен модел за плоча с размери 0.3m на 0.3m и дебелина 3mm, Модул на Юнг $E = 200\text{GP}$ и коефициент на Поасон 0.3 са представени на Фиг.5.13.



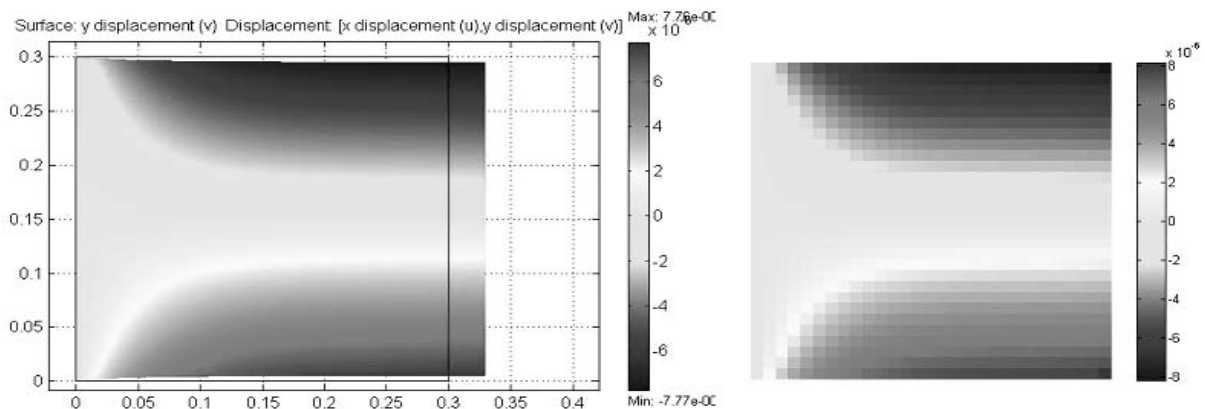
Фигура 5.13. Контурна графика на преместването по z с FEMLAB (ляво) и ФПМ/ПЗТ (дясно) модели за плоча

Численият резултат за максималното отместване с FEMLAB е $-2.67\text{e-}6$ сравнен с нашия резултат $-2.6619\text{e-}6$ за плоча, моделирана с МКЕ мрежа от 20x20 елемента потвърждава високото качество на предложения модел при външни сили.

За да се изяснят някои особености относно вътрешно равнинния модел на плочата по време на работа, са направени някои експерименти с плоча натоварена с равнинни сили. За целта е използван квадратна плоча с размери 3m на 3m и дебелина 3cm, модул на Юнг $E = 200\text{e}7 \text{ P}$ и коефициент на Поасона 0.3 с фиксирана една страна. Срещуположната страна на композитната плоча по цялата дължина действа разпределена сила от 1000 N/m. На фигури 5.14 и 5.15 са показани, резултатите, получени с предложия модел сравнени с резултатите при стандартен FEMLAB модел.



Фигура 5.14. Графика на преместванията в x направление с FEMLAB (ляво) и предложения ФПМ/ПЗТ (дясно) модели



Фигура 5.15. Графика на преместванията в y направление с FEMLAB (ляво) и предложения ФПМ/ПЗТ (дясно) модели

Следващите резултати са получени при симулация с модел на квадратна плоча с два слоя с размери a . Параметрите за ФПМ слоя, използвани в този числен екперимент са дадени в Таблица 5.3.

Таблица 5.3. Параметри на ФПМ слой

Модул на Юнг E_0 на долната повърхност на ФПМ слоя	200×10^7 Pa
Отношение на модулите на Юнг E_h/E_0	10 (или 0.1)
Коефициент на Поасон	0.3
Дебелина t_k	0.003 m
Отношение страна/дебелина a/t_h	10 (или 100)

Матриците на коравината C_b^p и C_s^p и матрицата на трансформираните пиезоелектрически коефициенти $[e_b]$ за пиезоелектрическия слой са:

$$C_b = \begin{pmatrix} 32.6 & 4.3 & 0 \\ 4.3 & 7.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1.05 \end{pmatrix} \text{GPa}, \quad C_s = \begin{pmatrix} 1.29 & 0 \\ 0 & 1.29 \end{pmatrix} \text{GPa}, \quad [e_b] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6.76 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{C/m}^2$$

Механичната сила $F(x, y)$ и електрическият потенциал $\Phi(x, y, z)$ са избрани синусоидални както следва

$$F(x, y) = f_0 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right) \quad \Phi(x, y, z) = V(z) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a}y\right)$$

Амплитудата на механичната сила е избрана $f_0 = -40 \text{ N/m}^2$. Резултатите са сравнени с аналитични резултати, които са много чувствителни към началните условия. Разгледани са различни случаи със и без приложен електрически потенциал на пиезоелектричния слой и при различно отношение страна/дебелина на a/t_h ФПМ слоя. Използвани са следните безразмерни параметри при представянето на числените резултати.

$$u^* = \frac{E_0 u_0}{|f_0| s^3 h}, \quad w^* = \frac{100 E_0 w_0}{|f_0| s^4 h}, \quad \sigma_x^* = \frac{\sigma_x}{|f_0| s^2}, \quad \sigma_y^* = \frac{\sigma_y}{|f_0| s^2}, \quad \sigma_{xy}^* = \frac{\sigma_{xy}}{|f_0| s^2}$$

Стойността u^* е пресметната в точки $(0, \frac{a}{2}, 0)$ и $(0, \frac{a}{2}, h)$. Стойността w^* е пресметната в точката $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{h}{2})$. Стойностите на σ_x^* и σ_y^* са пресметнати в точки $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$ и $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, h)$ и стойността на σ_{xy}^* е пресметната в точките $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, h)$.

Таблица 5.4 съдържа сравнителни резултати за реакцията на композитна ФПМ/ПЗТ тънка плоча, получена с предложения модел ($E_h/E_0 = 10$, $a/t_h = 100$). Величините $u_1^*, w_1^*, \sigma_{x1}^*, \sigma_{y1}^*, \sigma_{xy1}^*$ съответстват на случая с приложена синусоидална електрическа сила и величините $u_2^*, w_2^*, \sigma_{x2}^*, \sigma_{y2}^*, \sigma_{xy2}^*$ съответстват на случая без приложена електрическа сила. Таблица 5.5 съдържа тези сравнителни резултати за случая на дебела плоча ($E_h/E_0 = 0.1$, $a/t_h = 10$).

Намалявайки една от страните в модела на плочата ние получаваме модел на греда. Получени са числени симулации за ФПМ/ПЗТ греда с дължина 300mm и ширина 10 mm с два залепени пиезоелектрически слоя на нгорната и долната повърхности на основната греда с помощта на предложения модел. Тези резултати съвпадат с резултатите получени с МКЕ модел на греда на Ойлер-Бернули.

Таблица 5.4. Сравнителни резултати за тънка плоча $T E_h/E_0 = 10$, $a/t_h = 100$

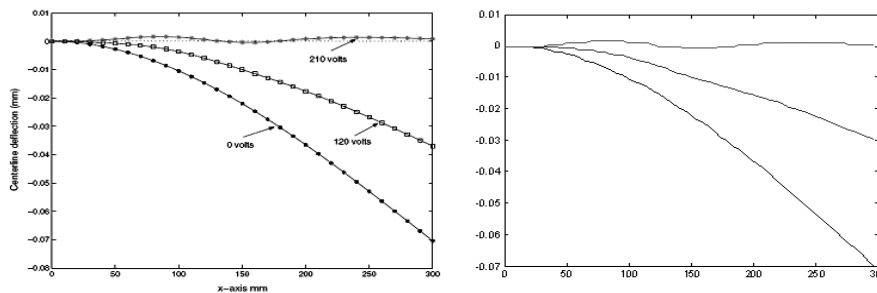
(V)		u_1^*	u_2^*	w^*	σ_{x1}^*	σ_{x2}^*	σ_{y1}^*	σ_{y2}^*	σ_{xy1}^*	σ_{xy2}^*
100	Numeric	-0.0202	-0.0496	0.9341	0.0296	1.61260	-0.1143	0.173	0.023	-0.4817
	Analytic	-0.0202	-0.0497	0.9368	0.0291	1.61240	-0.1145	0.1751	0.0230	-0.4813
-100	Numeric	-0.0188	0.0681	-2.7629	0.145	-2.4429	0.2886	-1.005	-0.117	0.9312
	Analytic	-0.0188	0.0682	-2.7678	0.1457	-2.4446	0.2892	-1.0090	-0.117	0.9298
0	Numeric	-0.0195	0.0093	-0.9144	0.0873	-0.4151	0.0872	-0.416	-0.047	0.2247
	Analytic	-0.0195	0.0093	-0.9155	0.0874	-0.4161	0.0873	-0.4170	-0.047	0.2243

Таблица 5.5. Сравнителни резултати за дебела плоча $E_h/E_0 = 0.1$, $a/t_h = 10$

(V)		u_1^*	u_2^*	w^*	σ_{x1}^*	σ_{x2}^*	σ_{y1}^*	σ_{y2}^*	σ_{xy1}^*	σ_{xy2}^*
100	Numeric	-2.9672	-108.032	3220.7	-41.577	42.284	-169.77	27.592	56.911	-18.815
	Analytic	-3.1845	-114.011	3253.3	-41.091	44.307	-170.31	28.103	56.918	-19.450
-100	Numeric	2.787	108.3753	-3238.1	42.375	-42.440	170.537	-27.751	-57.332	18.8998
	Analytic	3.0017	114.3489	-3270.8	41.899	-44.468	171.099	-28.268	-57.346	19.5333
0	Numeric	-0.0901	0.1716	-8.6802	0.399	-0.077	0.3842	-0.079	-0.210	0.0424
	Analytic	-0.0914	0.1686	-8.7397	0.404	-0.080	0.3900	-0.082	-0.213	0.0416

Сравненията на графиките за z преместванията са дадени на Фиг. 5. Двата пиезоелектрически слоя залепени на горната и долната повърхност на основната греда действат като управляващи устройства. Приложени са им еднакви напрежения с противоположни знаци с цел да се управлява деформацията на н гредата, която е подложена на концентрирана сила в свободния ѝ край. В този експеримент пиезоелектрическите слоеве са разделени на 5 двойки управляващи устройства и различни комбинации от двойки могат да бъдат активирани. Фигура 5.15 дава графически преместването на централната линия на запънатата греда с две активирани двойки пиезоелектрически парчетаразположени в левия край и в средата на гредата.

За да се провери поведението на динамичния модел и модите при вибрации, на основата на ур. (5.99) ние разглеждаме квадратна плоча с размери 0.5m на 0.5m с модул на Юнг $E = 70\text{GPa}$, коефициент на Поасон 0,3 и плътност 2700 kg/m^3 . В таблици 5.6 и 5.7 са показани резултатите, получени със стандартен модел на FEMLAB и с предложения модел.



Фигура 5.15. Графикка напречното отместване на централната линия на греда с МКЕ модела на Ойлер-Бернули и с предложения МКУ модел.

Таблица 5.6. Собствени честоти, получени с FEMLAB

Дебелина	Собствени честоти					
	първа	втора	трета	четвърта	пета	шеста
0.05	906,0510	2201,850	2202,260	3358,750	4185,320	4189,650
0.005	97,0051	243,632	243,675	391,209	490,543	491,404
0.00005	0,9710	2,440	2,440	3,921	4,916	4,924

Таблица 5.7. Собствени честоти, получени с ФПМ/ПЗТ модел

Дебелина	Собствени честоти					
	първа	втора	трета	четвърта	пета	шеста
0.05	918.6182	2147.3176	2147.3176	3119.5268	3119.5268	3244.4108
0.005	96.7779	241.9405	241.9405	386.6922	484.0981	484.0981
0.00005	0.9745	2.4639	2.4639	4.2603	4.9673	4.9673

В маркираните квадратчета са показани собствени честоти, които са намерени с предложения модел, но които отсъстват в резултатите, получани с FEMLAB. Това се обяснява с факта, че в предложения модел са използвани равнинни премествания, които липсват в модела на FEMLAB. Собствените вектори, съответстващи на тези собствени честоти са нулеви в z направлението и имат ненулеви стойности само в x и y направляванията. Следва да се отбележи, че това явление може да се наблюдава само при по-дебели греди и плочи, където вибрациите в x и y посоките са сравними с тези в z посоката.

Откриване на повреди с МКЕ модела и ГА оптимизация

Материалът на една композитна структура, подложена на периодични динамични натоварвания след известно време проявява умора заради появилите се микро-пукнатини и пдефекти. Пукнатина в някой елемент може да причини сериозни промлеми за цялата структура. Следователно, откриването на повредите е много важно за много приложения на динамични структури.

Тук, ние ще приложим създадения статичен модел ур. (5.97) по подходящ начин за моделиране на повреди и за идентификация и изследване на повреди чрез използването на статично натоварване. За целта на нашите изследвания избираме квадратна плоча с 12 на 12 правоъгълни крайни елемента. Ще предполагаме, че знаем, че само един от елементите е повреден, но не знаем къде се намира този елемент. Нашата задача е да намерим мастото на повредения елемент и степента на неговата поввреда. Повредата моделираме чрез редуция на стойностите на матрицата на коравината на съответния елемент. Позицията на дефектирания елемент се описва с неговата позиция по x и y посоките. Следното уравнение се използва като оптимизационен критерий

$$err(V^{el}) = \|X(V^{el}, F) - \bar{X}(F)\|, \quad (5.99)$$

където \bar{X} е предварително определена целева функция. Процесът на идентификация се основава на генетичен алгоритъм (ГА). В талици 5.8 – 5.10 са показани резултатите от числената реализация на търсенето

Таблица 5.8. Намиране на повреден елемент с 80% от нормалната коравина

Популация	Позиция на повредения		Строгост	<i>err</i> стойност
	елемент			
	Ред	Стълб		
5	2	6	0.8171	7.037
10	2	8	0.8421	1.6039
20	2	8	0.8016	0.002476
50	2	8	0.7924	0.054899

Таблица 5.9. Намиране на повреден елемент с 85% от нормалната коравина

Популация	Позиция на повредения		Строгост	Годност
	елемент			
	Ред	Стълб		
5	5	8	0.8805	5.9543
10	4	8	0.8484	0.009043
20	4	8	0.8503	0.00043376
50	4	8	0.8509	0.0029395

Таблица П.510. Намиране на повреден елемент с 10% от нормалната коравина

Популация	Позиция на повредения		Строгост	Годност
	елемент			
	Ред	Стълб		
5	10	2	0.8901	0.78795
10	10	3	0.8942	0.52926
20	11	2	0.9017	0.0048749
50	11	2	0.9001	1.4878e-005

5.6. МКЕ модел на строителни структури

5.6.1. Едномерен модел на многоетажна сграда

Сеизмичните смущения предизвикват вибрации на строителните структури, водещи до загуба на устойчивост и, в крайна сметка, до разрушаването им. В тази връзка възниква задачата за погасяването на вибрациите на тези структури посредством допълнително прилагани сили, пресмятани на основата на текущите изменения, т.е. задачата за управление на строителна структура по принципа на обратната връзка. За решаването на тази задача е необходимо построяването на математически модел на строителната структура. В тази част на работата се излага моделът на многоетажна постройка, който ще се използва по-късно за синтезиране на управление. Механичният модел представлява

система от материални точки, на една от които действа управляващата сила. Уравненията на тази система се привеждат в специален вид, така че да съдържат само един параметър, характеризиращ колебателните свойства на сградата. Този специален вид на уравненията на движението ще се използва в задачата за погасяване на вибрациите в многоетажна сграда.

И така, управляемото съоръжение се моделира като едномерна верига от еластично-вискозни материални точки (етажите на сградата), една от които (основата) извършва постъпателно движение, породено от сеизмично въздействие. Предполага се, че масата на основата е много по-голяма от масите на останалите материални точки и затова влиянието на движението на етажите на сградата върху движението на основата може да се пренебрегне. Предполагаме, че всички материални имат еднаква маса, и че еластичните и дампинг връзките се моделират с линейни елементи с еднакви коефициенти на еластичност и дампинг. Още предполагаме, че управляващата сила действа само на една от материалните точки.

Уравненията на движението на разглежданата система имат вида

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi}_1 &= -2b\dot{\xi}_1 - 2c\xi_1 + b\dot{\xi}_2 + c\xi_2 - m\ddot{\xi}_0(t), \\
 &\dots\dots\dots \\
 m\ddot{\xi}_k &= -2b\dot{\xi}_k - 2c\xi_k + b\dot{\xi}_{k-1} + c\xi_{k-1} + \\
 &\quad + b\dot{\xi}_{k+1} + c\xi_{k+1} + U - m\ddot{\xi}_0(t), \\
 &\dots\dots\dots \\
 m\ddot{\xi}_n &= -b\dot{\xi}_n - c\xi_n + b\dot{\xi}_{n-1} + c\xi_{n-1} - m_0\ddot{\xi}_0(t),
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

където $\xi = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, ξ_i е координатата на i -тата материална точка относно основата, U е управляващата сила, приложена към k -тата материална точка, ξ_0 е координатата на основата относно координатната система. Масата на материалната точка означаваме с m , а коефициентите на дампинг и еластичност на междуетажните връзки означаваме с b и c , съответно.

Нека въведем безразмерните променливи \bar{t} , $\bar{\xi}$, u , v_1 .

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{c}{m}}t, \quad \bar{\xi} = \frac{c}{u_*}\xi, \quad u = u_*^{-1}U, \quad v_1 = -\frac{m}{u_*}\ddot{\xi}_0,$$

където u_* е дадена положителна величина – мащабът на управляващата сила. След такава замяна променливите в ур. (5.100) във векторен запис приемат вида

$$\ddot{\bar{\xi}} = -\beta K\dot{\bar{\xi}} - K\bar{\xi} + qu + pv_1, \tag{5.101}$$

където точката е диференциране по безразмерно време \bar{t} .

$$\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_n)^T, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{mc}},$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix},$$

Записваме системата (5.101) в каноничен вид на управляема линейна система

$$\dot{x} = Ax + Bv_1 + B_2u, \tag{5.102}$$

където $x = \text{col}(\bar{\xi}, \dot{\xi})$, а блочните матрици A, B, B_2 имат вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -K & -\beta K \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \tag{5.103}$$

Приемаме, че системата (5.102) има нулеви начални условия.

Да предположим, че имаме възможност да наблюдаваме следните величини

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + v_{21}, \\ y_2 &= x_2 - x_1 + v_{22}, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= x_n - x_{n-1} + v_{2n}, \end{aligned} \tag{5.104}$$

т.е. деформациите на междуетажните съединения, измервани с някакви грешки $v_2 = \text{col}(v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n})$. Да въведем вектора $y = \text{col}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и да препишем ур. (5.104) във вида

$$y = C_2x + v_2, \tag{5.105}$$

където

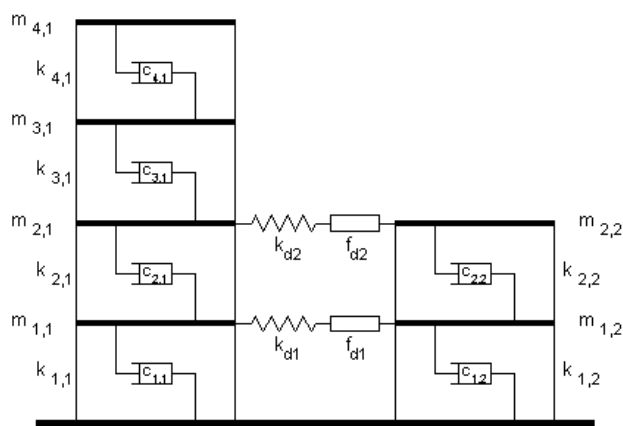
$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Така, ур. (5.102) и (5.105) на динамиката на сградата и на достъпните изменения представляват математическия модел на управляемата структура.

5.6.2. Модел на комплекс от две сгради

Основна висока сграда и придружаваща я по-ниска сграда се срежат като привлекателен архитектурен комплекс в урбанизираните големи градове. Такова групиране на сгради е по-податливо на повреди поради неочаквано намаляване

на коравината. Прилагат се пасивни методи за стабилизирането на такива комплекси, но техен недостатък е, че ефективността с фиксирано ниво на триене варира при различна сила на земетресенията. При висока сеизмична активност е препоръчителна по-голяма сила на триене, докато при по-умерена сеизмична активност силата на триене следва да е по-малка. За да се подобри адаптивността на управляваната структура спрямо различна сеизмична активност за намаляване и уравниване на реакцията на свързани сгради, в този параграф се разглежда техен математически модел, който после се използва при синтез на адаптивно полуактивно управление свързано с дампинга с триене.



Фигура 5.16. Схема на комплекс от две сгради

Моделиране на сградите. Моделът на свързани сгради се състои от една висока постройка от N_1 етажа и от една по-ниска постройка от N_2 етажа ($N_1 > N_2$) (Фиг.5.16). Предполага се, че височините на етажите са равни и че при някои от тях има връзки P на брой ($P \leq \min(N_1, N_2)$) във вид на триене, които се разположени на височината на съответните етажи. Всеки етаж представлява отделна масова точка. С всяка масова точка е свързана една степен на свобода по дадено направление. Комплексът от сгради е подложен на външно едностранно хоризонтално смущение (земетресение). Така математическият модел представлява многозвенна система от тела. Дамперите с триене участват във формирането на полуактивното управление. Уравненията на движението на комплекса от свързани сгради с полуактивно управление имат вида:

$$\begin{aligned}
 m_{11}\ddot{x}_1 &= -2k_{11}x_1 - 2c_{11}\dot{x}_1 + k_{21}x_2 + c_{21}\dot{x}_2 - u_1 - m_{11}\ddot{x}_g \\
 m_{21}\ddot{x}_2 &= k_{11}x_1 + c_{11}\dot{x}_1 - 2k_{21}x_2 - 2c_{21}\dot{x}_2 + k_{31}x_3 + c_{31}\dot{x}_3 - u_2 - m_{21}\ddot{x}_g \\
 m_{31}\ddot{x}_3 &= k_{21}x_2 + c_{21}\dot{x}_2 - 2k_{31}x_3 - 2c_{31}\dot{x}_3 + k_{41}x_4 + c_{41}\dot{x}_4 - m_{31}\ddot{x}_g \\
 m_{41}\ddot{x}_4 &= k_{31}x_3 + c_{31}\dot{x}_3 - k_{41}x_4 - c_{41}\dot{x}_4 - m_{41}\ddot{x}_g \\
 m_{12}\ddot{x}_5 &= -2k_{21}x_5 - 2c_{12}\dot{x}_5 + k_{22}x_6 + c_{22}\dot{x}_6 + u_1 - m_{12}\ddot{x}_g \\
 m_{22}\ddot{x}_6 &= k_{12}x_5 + c_{12}\dot{x}_5 - k_{22}x_6 - c_{22}\dot{x}_6 + u_2 - m_{22}\ddot{x}_g
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

със следните означения

$$M_1 = \text{diag}[m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{41}] \quad M_2 = \text{diag}[m_{21}, m_{22}]$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -2c_{11} & c_{21} & 0 & 0 \\ c_{11} & -2c_{21} & c_{31} & 0 \\ 0 & c_{21} & -2c_{31} & c_{41} \\ 0 & 0 & c_{31} & -c_{41} \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -2k_{11} & k_{21} & 0 & 0 \\ k_{11} & -2k_{21} & k_{31} & 0 \\ 0 & k_{21} & -2k_{31} & k_{41} \\ 0 & 0 & k_{31} & -k_{41} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -2c_{12} & c_{22} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} -2k_{12} & k_{22} \\ k_{12} & -k_{22} \end{bmatrix}$$

Ур. (5.106) имат следния матричен запис

$$M\ddot{x}(t) = C\dot{x}(t) + Kx(t) + Hu(t) - G\ddot{x}_g(t), \quad (5.107)$$

където $x(t)$ е векторът на относителните премествания по отношение на основата. Матриците на масата, на дампинга и на коравината с размерност $N \times N$ ($N = N_1 + N_2$) се дават с формулите

$$M = \text{diag}[M_1, M_2], \quad C = \text{diag}[C_1, C_2], \quad K = \text{diag}[K_1, K_2] \quad (5.107)$$

Матриците G и H на позициите на ускорението на основата $\ddot{x}_g(t)$ и на управляващите сили $u(t)$ са

$$G = [m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{41}, m_{51}, m_{61}]^T \quad \text{или} \quad G = \begin{pmatrix} M_1 I_1 \\ M_2 I_2 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_1 \\ -H_2 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} H_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

Моделиране на триещите устройства. Разглеждаме дампинг с триене, реализиращ се чрез пиезоелектрическо управляващо устройство, което произвежда притискаща сила, и което се характеризира със задоволително качество. Притискащата сила е пропорционална на подаваното напрежение.

Дамперът с триене се моделира с две компоненти – линейна пружина и плъзгач с триене, съединени последователно. Линейната пружина се моделира с триене на Кулон при плъзгане с динамична константа на триене μ . Полуактивната сила на триене f_{dk} на k -тия дампер е линейно пропорционална на притискащата сила. Поради това, че двете компоненти на дампера с триене са свързани последователно, силите на полуактивното управление $[u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]^T$ зависят от това дали плъзгачът се движи или е спрял за всеки дампинг

$$u_k(t) = \begin{cases} f_k(t), & \text{ако } f_k(t) \leq |f_{dk}(t)| \\ f_{dk}(t), & \text{ако } |f_k(t)| > |f_{dk}(t)| \end{cases} \quad (5.109)$$

където $f_k(t) = k_{dk} x_k^{rel}(t)$ е еластичната сила, а $f_d = [f_{d1}, f_{d2}, \dots, f_{dp}]^T$ е векторът на полуактивната сила на триене и $K_d = \text{diag}[f_{d1}, f_{d2}, \dots, f_{dp}]$ е $P \times P$ диагонална матрица на

коравината на пружината. $x_k^{rel}(t)$ е относителното преместване между двете сгради за k -тия дамлинг. Силите на полуактивното триене общо могат да се представят с

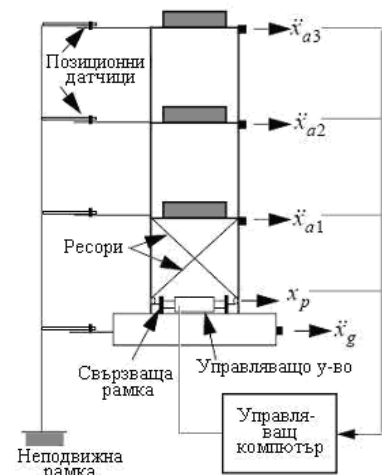
$$f_{dk}(t) = \mu N_k(t) \operatorname{sgn}[\dot{x}_k^{rel}(t)]. \quad (5.110)$$

Силата на притискане $N_k(t) \geq 0$ се определя от управлението по обратна връзка. Ако плъзгачът се движи непрекъснато, полуактивната управляваща сила $u(t)$ е равна на силата на триене $f_d(t)$, която при компютърните пресмятания се обновява на всяка стъпка по времето според показанията на управлението по обратна връзка. Дампънгът с триене може да спре да се движи, ако управляващата сила стане по-голяма от $f(t)$.

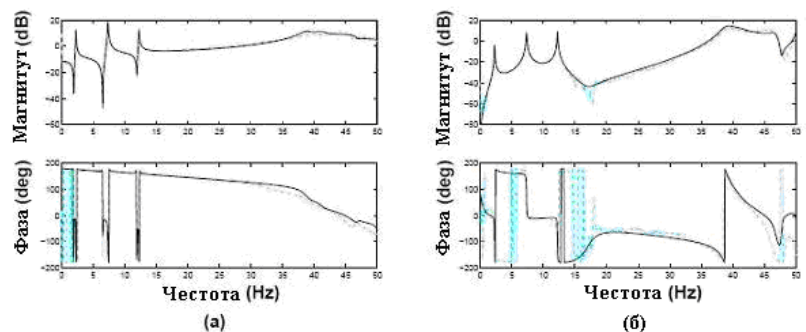
5.6.3. Модел на сграда с активен масов драйвер

В този параграф се разглежда аналитичен модел на триетажна сграда с ресорно управление, реализирано чрез активен механизъм за привеждане на движение на маси – активен масов драйвер АМД. Структурата има маса е.950 кг., разпределена по трите етажа, и височина 2.54 м. (Фиг.5.17). Първите три моди на модела са 2.27 Hz, 7.33 Hz и 12.24 Hz с дамлинг съответно 0.6 %, 0.7 % и 0.3%.

Управлението на сградата е организирано чрез едно хидравлично управляващо устройство, четири диагонални ресора и твърда стоманена рамка. Металната рамка свързва управляващото устройство с ресорите, а диагоналните ресори предават силата от управляващото устройство към първия етаж на структурата. Тъй като хидравличните управляващи устройства имат неустойчива отворена верига, се използва управляваща система с обратна връзка, за да се стабилизира управляващото устройство и да се подобри качеството. Обратният сигнал е комбинация от измерения на позицията, скоростта, налягането и отместването на буталото. На всеки етаж и при



Фигура 5.17. Схема на сградата



Фигура 5.18. Преносни функции на модела и експериментални данни: (а) управляващ вход към ресорите; (б) управляващ вход към абсолютното ускорение на третия етаж

основата са поставени акселометри, които замерват абсолютните ускорения на етажите и на сеизмичната активност на основата. Преки измервания на преместванията не са възможни.

Математическият модел има 20 състояния и има вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\ddot{x}_g(t) \quad (5.111)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_y\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_y\ddot{x}_g(t) + \mathbf{v}(t) \quad (5.112)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_z\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_z\ddot{x}_g(t) \quad (5.113)$$

където \mathbf{x} е векторът на състоянията, \ddot{x}_g е ускорението на основата, u е управляващият вход, $\mathbf{y} = [x_p, \ddot{x}_{a1}, \ddot{x}_{a2}, \ddot{x}_{a3}, f, \ddot{x}_g]$ е вектор на измерванията, $\mathbf{z} = [x_1, x_2, x_3, x_p, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_p, \ddot{x}_{a1}, \ddot{x}_{a2}, \ddot{x}_{a3}, f]$ са състоянията, които могат да бъдат управлявани. x_p е преместването на управляващото устройство, \mathbf{v} е шумът от измерванията.

Нека обединим ускорението на основата и шума от измерванията в общ вектор на смущенията $\mathbf{w}(t)$ и да препишем ур. (5.111) – (5.113) във вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u\mathbf{u} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \quad (5.114)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_y\mathbf{x} + \mathbf{D}_{yu}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{yw}\mathbf{w} \quad (5.115)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} + \mathbf{D}_{zu}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{zw}\mathbf{w} \quad (5.116)$$

Този модел представя входно-изходното поведение на структурната система до 50 Hz като включва ефектите от динамиката на управляващото устройство и датчиците и връзката между управлението и структурата. Фиг.5.18 показва сравнение между предавателната функция на модела и експериментални данни. Този модел се използва за оценяване на качеството на управлението за структурата.

Литература

1. Sunar M., S.S. Rao, Recent advances in sensing and control of flexible structures via piezoelectric materials technology, *Appl Mech Rev*, 1999, 52(1).
 2. B.K. Wada, J.I Fanson, E.F. Crawley, Adaptive structures, ASME Winter Annual Meeting, San Francisco CA, ASME, AD 15, 1989.
 3. S.S. Rao, M. Sunar, Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures. A survey, *Appl. Mech. Rev.*, 1994, 47(2).
 4. NageshBabu G.L., Hanagud S., Robustness and vibration control of adaptive structures by use of piezoelectric sensors and actuators, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures. Structural Dyn and Mat Conf, Baltimore MD, 1991.
 5. Giurgiuyiu V., Fogers C.A., Large amplitude rotary induced strain (LARIS) actuator, *J Intelligent Material Struct*, 1997, 8(1).
 6. Gandhi M.V., Thompson B.S., Smart materials and structures, Chapman & Hall, New York, 1992.
 7. CrawleyE.F., Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment, *J Aircraft*, 1994, 32(8).
 8. Near C.D., Piezoelectric actuator technology, SPIE Conf on Smart Struct and Mat, Newnham RE, 1996, SPIE 2717.
 9. Yang J.S., Batra R.C., Liang X.Q., Vibration of simply supported elastic plate due to piezoelectric actuators, SPIE Conf on Smart Struct and Mat, 1995, Proc SPIE 2442.
 10. Dimitriadis E.K., Fuller C.R., Rogers C.A., Piezoelectric actuators for distributed vibration excitation of thin plates, *J Vib Acoustic*, 1991, 113(1).
- D'Cruz J., Active control of panel vibration with piezoelectric actuator, *J Intelligent Mat Syst Struct*, 1993, 4(3).
11. Reddy J.N., Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis, CRC Press, 1997.
 12. Yang J.S., Equations for flexural motion of elastic plates with partially electroded piezoelectric actuators, *J Smart Mat Struct*, 1997, 6.
 13. Kim J., Varadan V.V., Varadan V.K., Finite element optimization methods for the active control of radiated sound from a plate structure, *J Smart Mat. Struct*, 1995, 4(4).
 14. Polla D.L., Ferroelectric microsensors and microactuators, Proc IEEE Int Symp on Application of ferroelectrics.
 15. Moric M.A., Saigal S., Shape sensitivity analysis of piezoelectric structures by the adjoined variable method, *AIAA J*, 1991, 29(8).

16. Berry A, Carette F., Guigou C., Volume velocity sensors for plates, Proc ASME Int Mech Eng Congress, San Francisco CA, 1995, 95WA-/NCA-7.
17. Burke S.E., Sullivan J.M., Limitations of Piezoelectric Sensors for Structural Control, SPIE Conf of Smart Structures and Integrated Systems, 1995, SPIE 2443.
18. Tiersten H.F., Linear Piezoelectric Plate Vibrations, Plenum Press, New York, 1969.
19. Tzou H.S., Ye R., Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric shells, *AIAA J*, 1996, 34(1).
20. Reissner E., Reflections on the Theory of Elastic Plates, *Appl. Mech. Reviews*, 1985, 38(11).
21. Panc V., Theories of Elastic Plates, Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1975.
22. Whitney J.M., The Effect of Transverse Shear Deformation in the Bending of Laminated Plates, *J Composite Materials*, 1959, 3.
23. Reddy J.N., Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley and Sons, New York, 1984.
24. Wang C.M., Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions, *J. Eng. Mech., ASCE*, 1995, 121(6).
25. Franklin J.N., Matrix Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
26. Goldberg J.L., Schwartz A.J., Systems of Ordinary Differential Equations, An Introduction, Harper and Row, New York, 1972.
27. Mallik N., Ray M.C., Effective Coefficients of Piezoelectric Fiber Reinforced Composites, *AIAA J.*, 2003, 41.
28. Pagano N.J., Exact Solution for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates, *J. Compos. Mater.*, 1970, 4.
29. Sankar B.V., An Elasticity Solution for Functionally Graded Beams, *Compos. Sci. Technol.*, 2001, 61.
30. Zhong Z., Shang E.T., Three-Dimensional Exact Analysis of a Simply Supported Functionally Gradient Piezoelectric Plate, *Int. J. Solids Struct.*, 2003, 40.
31. Hughes T.J.R., The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
32. Newmark N.M., A Method of Computation for Structural Dynamics, *J. Eng. Mech. Division, ASCE*, 1959.
33. Belytschko T., Hughes T.J.R., (Eds), Computational Methods for Transient Analysis, 1, North-Holland, Amsterdam, the Netherlands, 1983.
34. Reddy J.N., An Introduction to the Finite Element Method, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1993.
35. Barlow J., More on Optimal Stress Points – Reduced Integration Element Distortions and Error Estimation, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1989, 28.

36. Sankar B.V., An elasticity solution for functionally graded beams, *Composite Science and Technology*, 2001, 61(5).
37. M.C. Ray, H.M. Sachade, Exact solutions for the functionally graded plates integrated with a layer of piezoelectric fiber-reinforced composite, *ASME J. Applied Mechanics*, 2007, 73.
38. E.P. Hadjigeorgiou, G.E. Stavroulakis, C.V. Massalas, Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization, *Int. J. Engineering Science*, 2006, 44(7).
39. Spenser B.F., Sain M.K., Controlling Buildings: a New Frontier in Feed-back, *IEEE Control Systems*, 1997, 17(6).
40. Nishimura H., Kojima A., Seismic Isolation Control for a Buildinglike Structure, *IEEE Control Systems*, 1999, vol. 19(6).
41. Баландин Д.В., Коган М.М., Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях, *Изв. АН Теория и Системы Управления*, 2004, № 5.
42. Chen G.D., Garrett G.T., Chen C.C., Cheng F.Y., Piezoelectric friction dampers for earthquake mitigation of buildings: Design, fabrication, and characterization, *Structural Engineering and Mechanics*, 2004, 17(3–4).